TD3 - Forme clausale

Exercice 1. Non-confluence de la mise sous forme clausale

Définition 1. Deux formules sous forme clausale sont dites *distinctes* si elles ne sont pas équivalentes modulo associativité et commutativité

Question 1. Donner un exemple de formule telle que les règles de mise sous forme clausale peuvent conduire à deux formules distinctes

Exercice 2. Mettre sous forme clausale fait grossir

Définition 2. Soit ϕ une formule, on note $|\phi|$ sa taille et $\tau(\phi)$ la taille minimale d'une forme clausale de ϕ.

Question 2. Donner un exemple d'une famille ϕ_n de formules telles que

$$\lim_{n\to+\infty} |\phi_n| = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{\tau(\phi_n)}{\sqrt{2^{|\phi_n|}}} > 0$$

Question 3. Montrer que pour toute formule ϕ, $\tau(\phi) < |\phi| \times 2^{\frac{|\phi|+5}{2}}$

Exercice 3. Résolution *input*

Définition 3. Une *clause de Horn* est une clause qui contient au plus un littéral positif.

On restreint la règle de résolution au cas où au moins l'une des prémisses est dans l'ensemble de clauses initial. Cette stratégie de résolution est dite *input*.

Question 4. Montrer qu'en général cette stratégie n'est pas réfutationnellement complète.

Question 5. Montrer que si l'ensemble initial E est un ensemble de clauses de Horn, la stratégie *input* est réfutationnellement complète.

Exercice 4. Résolution *négative*

Définition 4. Une clause est dite *négative* si elle ne contient que des littéraux négatifs.

On restreint la règle de résolution au cas où au moins l'une des prémisses est négative. Cette stratégie de résolution est appelée *stratégie négative*. On notera $\vdash_\neg$ la relation de déduction associée.

Question 6. Soit E un ensemble de clauses tel que toute clause de E contient au moins un littéral positif. Montrer que E est satisfaisable.

Question 7. Soit $E = \{P \vee Q, P \vee \neg Q, \neg P \vee Q, \neg P \vee \neg Q\}$. Montrer que $E \vdash_\neg \bot$.

Définition 5. Soit I et J deux interprétations partielles, on note $I >_{lex} J$ lorsqu'il existe un entier $k \geqslant 1$ tel que

- pour tout $n < k$, P_n est dans le domaine de I et dans le domaine de J et $I(P_n) = J(P_n)$.
- P_k est dans le domaine de I et dans le domaine de J et $I(P_k) = 1$ et $J(P_k) = 0$.

On note aussi $I \leqslant J$ l'ordre de prolongement des interprétations partielles.

Question 8. Montrer que $\geqslant_{lex}$ est un ordre sur les interprétations partielles

Question 9. Montrer que pour toutes interprétations partielles I et J, on a $I \leqslant J$ ou $J \leqslant I$ ou $I <_{lex} J$ ou $J <_{lex} I$.

Question 10. Soit A l'arbre sémantique d'un ensemble E de clauses. On suppose que A est fin, non vide et que toutes ses feuilles sont des nœuds d'échec. Montrer qu'il existe une unique interprétation partielle maximale pour $\geqslant_{lex}$ qui soit un nœud d'échec et ne falsifie aucune clause négative de E.

Question 11. Montrer la complétude réfutationnelle de $\vdash_\neg$ par la méthode des arbres sémantiques.