TD1 - Calcul propositionnel

Exercice 1. Satisfaisabilité et modèle

Soit ϕ et ψ deux formules propositionnelles.

Question 1. Montrer que ϕ est insatisfaisable si et seulement si $\neg\phi$ est valide

Question 2. Montrer que $\phi \vDash \psi$ si et seulement si $\phi \Rightarrow \psi$ est valide.

Exercice 2. Tout ensemble d'interprétations est-il bon à prendre ?

Question 3. Montrer que, lorsque $\mathcal{P}$ est fini, pour tout ensemble d'interprétations S, il existe un ensemble fini de formules E tel que S est exactement l'ensemble des modèles de E.

Question 4. Montrer que ce résultat est faux lorsque $\mathcal{P}$ est infini.

Exercice 3.

Définition 1 (Équivalence logique). Deux formules sont *logiquement équivalentes* si elles ont le même ensemble de modèles.

Question 5. Montrer que, si $\mathcal{P}$ est fini, alors dans tout ensemble de formules fini de cardinal assez grand (on explicitera la borne), il existe deux formules logiquement équivalentes.

Exercice 4.

Question 6. On considère $\mathcal{P}$ infini dénombrable. Donner un ensemble de formules dont l'ensemble des modèles est infini dénombrable.

Exercice 5. Un peu de coloriage

Question 7. Montrer qu'un graphe est coloriable avec k couleurs si et seulement si chacun de ses sous-graphes finis est coloriable avec k couleurs.

Exercice 6. Théorème d'interpolation

Question 8. Soient ϕ, ψ telles que $\phi \vDash \psi$. Montrer qu'il existe une formule θ telle que $\phi \vDash \theta$, $\theta \vDash \psi$ et les variables propositionnelles apparaissant dans θ, apparaissent aussi dans ϕ et dans ψ.

Exercice 7. Ensemble de connecteurs fonctionnellement complet

Question 9. Montrer que $\vee$, $\wedge$ et $\neg$ sont définissables à l'aide du seul connecteur $\Rightarrow$ et de la constante $\bot$.

On dit alors que l'ensemble $\{\Rightarrow, \bot\}$ est *fonctionnellement complet.*

Question 10. Donner un connecteur logique binaire qui est, seul, fonctionnellement complet.

Question 11. Montrer que $\{\Leftrightarrow, \neg\}$ n'est pas fonctionnellement complet.

Exercice 8. Ensemble maximal cohérent

Soit E un ensemble de formules du calcul propositionnel sur $\mathcal{P}$. On dira que E est maximal cohérent si E est satisfaisable et que, pour toute formule ϕ du calcul propositionnel, ou bien $\phi \in E$ ou bien $E \cup \{\phi\}$ est insatisfaisable.

Question 12. Supposons $\mathcal{P}$ fini. Montrer que tout ensemble de formules E satisfaisable est contenu dans un ensemble maximal cohérent.

Question 13. Montrer que cet ensemble maximal cohérent n'est pas unique : donner un ensemble E et deux ensembles maximaux cohérents distincts contenant E.

Question 14. Que devient le résultat de la question 12 lorsque $\mathcal{P}$ est infini dénombrable ?

Exercice 9. Théorème de la déduction

Question 15. Montrer que $\Gamma, \phi \vdash \Delta, \psi$ est prouvable en $\mathbf{LK_0^-}$ si et seulement si $\Gamma \vdash \Delta, \phi \to \psi$ est prouvable en $\mathbf{LK_0^-}$.

Exercice 10.

Question 16. Donner des règles d'introduction à gauche et à droite de $\leftrightarrow$, dans le style de $\mathbf{LK_0^-}$.