# TD11 - Jeux d'Ehrenfeucht-Fraïssé

## Exercice 1. Anneaux

Soit $\mathcal{F} = \emptyset$ et $\mathcal{P} = \{R(2), = (2)\}$. On définit $\mathcal{A}_n$ la structure consistant en un anneau orienté et $A_n$ l'ensemble sous-jacent. On note ses sommets $s_1, \ldots, s_n$ et on a donc $s_1 R s_2 R \ldots s_{n-1} R s_n R s_1$. On considère $\mathcal{S}_1 := \mathcal{A}_5$ et $\mathcal{S}_2 := \mathcal{S}_1 \uplus \mathcal{S}_1$.

**Question 1.** Montrer que, pour tous sommets $b, b'$ dans le domaine de $\mathcal{S}_2$ on peut trouver deux sommets $a_i, a_j \in A_5$ tels que la fonction $h$ définie par $h(a_i) = b$ et $h(a_j) = b'$ soit un isomorphisme partiel de $\mathcal{S}_1$ dans $\mathcal{S}_2$.

**Question 2.** Qu'en est-il pour 3 sommets ? Conclure en exhibant une formule $\phi$ qui distingue nos deux structures.

## Exercice 2.

**Question 3.** Donner deux structures $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ telles que $\mathcal{S}_1 \not\equiv \mathcal{S}_2$ et il existe un isomorphisme partiel de $\mathcal{S}_1$ dans $\mathcal{S}_2$ dont le domaine a (au moins) 3 éléments.

## Exercice 3. De l'importance de la platitude

Soit $\mathcal{S}_1$ de domaine $D_1$, $\mathcal{S}_2$ de domaine $D_2$ et $h$ une fonction partielle de $D_1$ dans $D_2$ de domaine de définition $\{a_1, \ldots, a_n\}$. On a vu en cours que $h$ est un isomorphisme partiel de $\mathcal{S}_1$ dans $\mathcal{S}_2$ ssi pour toute formule atomique *plate* $\phi$ de variables libres $x_1, \ldots, x_n$ on a

$$\mathcal{S}_1, \{x_i \mapsto a_i\}_{i=1\ldots n} \vDash \phi \;\text{ ssi }\; \mathcal{S}_2, \{x_i \mapsto h(a_i)\}_{i=1\ldots n} \vDash \phi$$

**Question 4.** Montrer que le résultat est faux sans l'hypothèse de platitude.

## Exercice 4. L'ordre des entiers naturels

Supposons $\mathcal{F} = \{S(1), 0(0)\}$, $\mathcal{P} = \{= (2)\}$ et soit $\mathcal{T}$ la théorie engendrée par les axiomes de l'égalité et

$$\begin{array}{ll} (A_1) & \forall x, y. S(x) = S(y) \Rightarrow x = y \\ (A_2) & \forall x. x \neq 0 \Rightarrow \exists y. x = S(y) \\ (A_3) & \forall x. 0 \neq S(x) \\ (A_4^n) & \forall x. x \neq S^n(x) \end{array}$$

Soit $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$ deux modèles de $\mathcal{T}$. On définit la fonction $d_i(a,b)$ de domaine de définition $D_i$ dans $\mathcal{M}_i$ par $d_i(a,b) = \min \left\{ n \in \mathbb{N} \middle| a = S^n_{\mathcal{M}_i}(b) \right\}$ avec la convention que $\min \emptyset = +\infty$.

Soit $i$ et $a, b, c \in D_i$.

**Question 5.** Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $d_i(S^k(a), a) = k$.

**Question 6.** Montrer que si $d_i(a,b) + d_i(b,c) < +\infty$, alors $d_i(a,b) + d_i(b,c) = d_i(a,c)$.

**Question 7.** Soit $k \in \mathbb{N}$, montrer que si $d_i(a, 0_{\mathcal{M}_i}) \geqslant k$, alors il existe un $a' \in D_i$ tel que $a = S^k_{\mathcal{M}_i}(a')$.

**Question 8.** On considère un jeu de Ehrenfreucht-Fraïssé sur $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_2$ où les coups successifs de $D$ et $S$ sont donnés par les séquences $(a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n)$ avec pour tout $i$, $a_i \in D_1$ et $b_i \in D_2$. Montrer que, pour $n$ fixé, $D$ a une stratégie qui permet d'assurer l'invariant

$$\forall i \leqslant n. \forall j_1, j_2 \leqslant i. [(d_1(a_{j_1}, a_{j_2}) \leqslant 2^{n-i}) \vee (d_2(b_{j_1}, b_{j_2}) \leqslant 2^{n-i})] \Rightarrow d_1(a_{j_1}, a_{j_2}) = d_2(b_{j_1}, b_{j_2})$$

**Question 9.** Montrer que $\mathcal{T}$ est complète.

**Question 10.** Les axiomes $A^n_4$ sont-ils tous nécessaires ? Peut-on remplacer cet ensemble d'axiomes par un sous-ensemble fini en conservant la complétude ? Justifier.

## Exercice 5. Non définissabilité

On prend $\mathcal{P} = \{R(2), =(2)\}$, les modèles sont donc des graphes orientés. On souhaite établir qu'il n'existe pas de formule exprimant la connexité d'un tel graphe.

On se donne un $n \in \mathbb{N}$ quelconque. On pose $\mathcal{S}_1 := \mathcal{A}_{2^n}$ et $\mathcal{S}_2 := \mathcal{S}_1 \uplus \mathcal{S}_1$. On notera $s^1_i$, $s^2_j$ les sommets de $\mathcal{S}_2$ dans les copies respectives de $\mathcal{S}_1$. On note $d_i(s, s')$ la quasi-métrique (distance non symétrique) entre deux sommets $s, s'$ dans $\mathcal{S}_i$. Cette distance est infinie quand il n'y a pas de chemin de $s$ à $s'$.

**Question 11.** Montrer que, pour un jeu à $n$ tour, duplicateur a une stratégie permettant d'assurer l'invariant suivant : *si* $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_k, b_k$ *sont les coups joués, alors pour tout* $i, j$ *on a :*

$$\begin{aligned} d_1(a_i, a_j) = d_2(b_i, b_j) \quad & si \quad d_1(a_i, a_j) < 2^{n-k+1} \\ d_2(b_i, b_j) > 2^{n-k} \quad & si \quad d_1(a_i, a_j) > 2^{n-k} \end{aligned}$$

**Question 12.** Montrer que la stratégie de la question précédente est une stratégie gagnante.

**Question 13.** Conclure.