# Tutorat de Complexité - 2

La totalité des problèmes posés sont tirés des références suivantes :

- Le cours *Complexité* de Pascal Vanier,
- Le cours *Introduction à la complexité* de Paul Rozière,
- Le cours *Complexity Theory* de Chris Umans,
- Le cours *Computationnal complexity* d'Abhijit Das,
- Le cours *Langages formels, calculabilité et complexité* d'Olivier Carton,
- Le cours *Langages formels, calculabilité et complexité* de Damien Vergnaud.

## 1 Réduction vers `SAT`

*Définition* 1.1 (`CH`). On s'intéresse au problème suivant :

- Entrée : Soit $\mathcal{G}$ un graphe orienté,
- Question : Existe-il un *cycle hamiltonien* dans $\mathcal{G}$, c'est-à-dire un cycle passant une et une seule fois par tous les nœuds de $\mathcal{G}$ ?

**Question 1.** Sans utiliser le théorème de Cook-Levin, montrer que le problème `CH` se réduit en temps polynomial au problème `SAT`.

Pour un graphe à $n$ nœuds, on peut introduire, pour coder une suite de nœuds de longueur $n$ : $(u_1, \dots, u_n)$, une relation binaire $R$ où $R_{i,j}$ signifie $u_i = j$ et axiomatiser propositionnellement le fait que la suite de nœuds représentée par $R$ est un chemin Hamiltonien.

## 2 Pas facile d'organiser des examens

*Définition* 2.1 (`EDT`). On s'intéresse au problème d'emploi du temps suivant :

- Entrée :
  - $n \in \mathbb{N}$ un nombre d'examens,
  - $p \in \mathbb{N}$ un nombre de créneaux disponibles,

- $C = \{C_1, \ldots, C_k\}$ un ensemble de sous-ensembles de $\{1, \ldots, n\}$, où $C_i$ représente les examens que doit passer l'élève $i$.

- Question : Est-il possible de trouver un emploi du temps (un fonction de $\{1, \ldots, n\}$ à $\{1, \ldots, p\}$) tel que tous les élèves peuvent aller à tous leurs examens ?

**Question 2.** Montrer que `EDT` est NP-complet.

# 3 Problèmes de sous-graphes

*Définition* 3.1 (`TRIANGLE FREE`). On s'intéresse au problème suivant :

- Entrée : $\mathcal{G}$ un graphe,
- Question : $\mathcal{G}$ contient-il un triangle (un graphe complet à 3 éléments) ?

**Question 3.** Montrer que `TRIANGLE FREE` est dans L.

*Définition* 3.2 (Graphes isomorphes). Deux graphes $\mathcal{G} = (V, E)$ et $\mathcal{G}' = (V', E')$ sont *isomorphes* s'il existe une fonction bijective $h : V \to V'$ telle que $\{v_1, v_2\} \in E$ si et seulement si $\{h(v_1), h(v_2)\} \in E'$.

*Définition* 3.3 (`SGI`). On s'intéresse au problème suivant, appelé *Subgraph Isomorphism* :

- Entrée : Deux graphes $\mathcal{G}$ et $\mathcal{G}'$,
- Question : Existe-t-il un sous-graphe de $\mathcal{G}$ isomorphe à $\mathcal{G}'$ ?

**Question 4.** Montrer que `SGI` est NP-complet.

*Définition* 3.4 (`BIG CYCLE`). On s'intéresse au problème suivant :

- Entrée : Un graphe $\mathcal{G}$,
- Question : Existe-t-il un cycle de taille supérieure à $\frac{\lfloor \mathcal{G} \rfloor}{2}$ dans $\mathcal{G}$ ?

**Question 5.** Montrer que `BIG CYCLE` est NP-complet.

# 4 Voyage, voyage

*Définition* 4.1 (Graphe fortement connexe). Un graphe est *fortement connexe* si pour tout nœuds $a$ et $b$, il existe un chemin permettant d'aller de $a$ à $b$.

*Définition* 4.2 (`STRONGLY CONNECTED`). On s'intéresse au problème suivant :

- Entrée : Un graphe $\mathcal{G}$,
- Question : $\mathcal{G}$ est-il fortement connexe ?

**Question 6.** Montrer que `STRONGLY CONNECTED` est NL-complet.