TD 3–TD4 : Automates d'arbres

En plus de ces exercices, il est vivement recommandé de lire la section 7 du TATA et de faire les exercices 1 du partiel du 18 mars 2010 et 3 de l'examen du 28 mai 2008 des annales.

Exercice 1 (Automate d'arbres descendants)**.** Soit $L \subset T(\Sigma)$ l'ensemble des arbres binaires sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$ tels que chaque chemin de la racine jusqu'à une feuille est étiqueté par un mot de $a^*(ba)^*b^*$. Construisez un automate d'arbre descendant qui reconnaît L.

Exercice 2 (Minimisation)**.** Soient $t_1 = f(f(a, \square), b)$ et $t_2 = f(a, b)$. Calculer les résiduels de $t_1^* t_2$. En déduire l'automate d'arbre minimal qui reconnnaît le langage $t_1^* t_2$.

Exercice 3 (Associativité)**.** Soit $\Sigma_2 = \{f\}$ et $\Sigma_0 = \{a, b\}$ et $\Sigma = \Sigma_0 \uplus \Sigma_2$. Un langage $L \subseteq T(\mathcal{F})$ est associativement clos s'il est fermé par la congruence engendrée par $f(f(x, y)) = f(x, f(y, z))$. Par la suite, on note $A(L)$ la clôture d'un langage L de $T(\Sigma)$.

1. Soient $t_1 = f(f(a, \square), b)$ et $t_2 = f(a, b)$; montrer que la clôture associative $A(t_1^* t_2)$ n'est pas reconnaissable.
2. Montrer que pour tout arbre $T(\Sigma)$, on a : $\mathsf{Fr}(T(\Sigma)) = \mathsf{Fr}(A(T(\Sigma)))$.
3. Montrer que pour tous L_1, L_2 de $T(\Sigma)$, $\mathsf{Fr}(L_1) \cap \mathsf{Fr}(L_2) = \mathsf{Fr}(A(L_1) \cap A(L_2))$.
4. Montrer que la famille des langages $A(L)$, où L est un langage reconnaissable d'arbres n'est pas fermée par intersection.

Exercice 4 (Langages non reconnaissables)**.** Soit l'alphabet constitué de $\Sigma_0 = \{c\}$ et $\Sigma_2 = \{a, b\}$.

1. Montrer que l'ensemble des arbres de $T(\Sigma)$ en forme de « peigne »

$$a(c, a(c, a(\ldots a(c, b(c, b(c, b(\ldots b(c, c))))))))$$

ayant autant de a que de b n'est pas reconnaissable.

2. Montrer que l'ensemble des arbres de $T(\Sigma)$ ayant le même nombre de nœuds étiquetés par a et par b n'est pas reconnaissable.

Exercice 5 (Théorème de Myhill-Nerode)**.** Montrer que $L \subset T(\mathcal{F})$ est reconnaissable si et seulement si il existe une $\mathcal{F}$-algèbre finie $A(\mathcal{F})$ telle que $L = \phi^{-1}(\phi(L))$, où $\phi : T(\mathcal{F}) \to A(\mathcal{F})$ est le morphisme canonique.

Exercice 6 (Reconnaissance généralisée)**.** On considère le problème de décision suivant :

instance un terme t de $T(\mathcal{F}, \mathcal{X})$ et un automate d'arbres $\mathcal{A}$

question est-ce qu'il existe une instance close de t acceptée par $\mathcal{A}$?

1. Montrer que si t est un terme linéaire, alors ce problème est dans P-Time.
2. Montrer que si t n'est pas linéaire mais $\mathcal{A}$ est déterministe, alors ce problème est NP-complet (on pourra chercher une réduction depuis SAT).

Exercice 7 (Un seul arbre)**.** Montrer que le problème de décision suivant est dans P-Time :

instance un automate d'arbres $\mathcal{A}$

question est-ce que $|L(\mathcal{A})| = 1$?

Exercice 8 (Problèmes de décision)**.**

1. Montrer que le problème du vide du langage d'un automate d'arbre peut être résolu en temps linéaire.
2. Montrer que les langages reconnaissables d'arbre sont clos par intersection. En déduire que le problème d'appartenance d'un arbre à un automate d'arbre est dans P-Time.