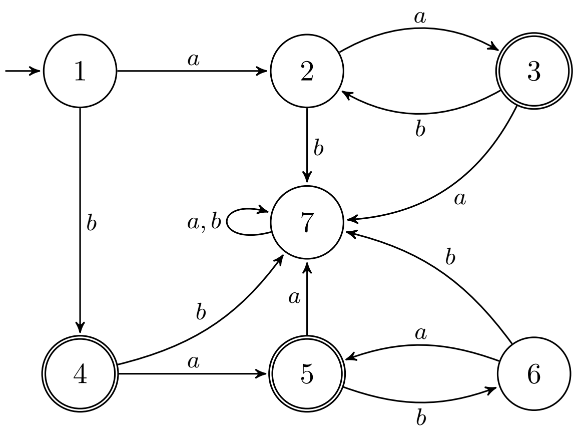
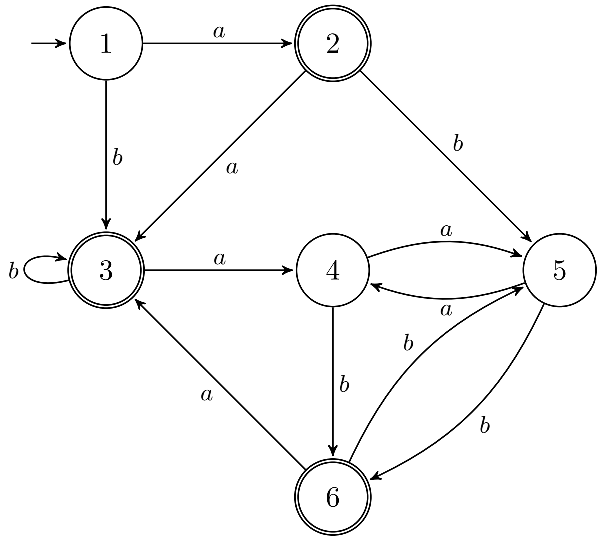
TD 2 : Minimisation - Reconnaissance par morphismes

Exercice 1 (Minimisations)**.** Minimiser les automates suivants :





Exercice 2 (Minimisation par renversement)**.** Montrer que l'automate déterminisé d'un automate co-déterministe et co-accessible est minimal. Quelle est la complexité de cette méthode de minimisation ?

Exercice 3. Déterminer à isomorphisme près tous les monoïdes à 2 et 3 éléments.

Exercice 4. Construire le monoïde syntaxique du langage $L = (ab)^*$ (sur l'alphabet $\{a, b\}$).

Exercice 5. Si $A = \{a, b\}$, montrer que les langages suivants sont sans étoile : A^*, $A^*aA^*bA^*$, $\{\varepsilon\}$, $(ab)^+$, $(ab)^*$. En utilisant la caractérisation par le monoïde syntaxique, montrer que le langage $(aa)+$ n'est pas sans étoile.

Exercice 6. Soit A l'alphabet $\{a, b\}$. En considérant le nombre de quotients à gauche du langage, montrer que tout automate déterministe acceptant le langage $L_n = A^*aA^n$ possède au moins 2^{n+1} états.

Exercice 7 (Automate à double sens (Boustrophédon))**.** Un automate Boustrophédon est un automate fini non déterministe qui, à chaque transition, peut déplacer sa tête de lecture vers la droite ou vers la gauche. De façon équivalente, c'est une machine de Turing à une seule bande qui n'écrit pas sur cette bande.

1. Montrer que tout langage accepté par un automate Boustrophédon est en fait rationnel.
2. Montrer qu'à partir d'un automate Boustrophédon ayant n états, on peut effectivement construire un automate déterministe classique équivalent ayant $2^{O(n^2)}$ états.

Exercice 8 (Propriété de sélection)**.** On dit qu'un morphisme $\mu : A^* \to B^*$ a la *propriété de sélection* si pour tout langage rationnel L, il existe un langage rationnel K inclus dans L tel que μ est injectif sur K et $\mu(K) = \mu(L)$. Le but de cet exercice est de montrer que tout morphisme a la propriété de sélection.

1. Montrer que tout morphisme injectif a la propriété de sélection.
2. Montrer que si les morphismes μ et ν ont la propriété de sélection, alors le morphisme $\mu \circ \nu$ a encore la propriété de sélection.

   On appelle *projection* un morphisme $\pi : A^* \to B^*$ tel que pour toute lettre $a \in A$, $\pi(a) = a$ ou $\pi(a) = \varepsilon$.
3. Montrer que pour tout morphisme $\mu : A^* \to B^*$, il existe un alphabet C, un morphisme injectif $\iota : A^* \to C^*$ et une projection $\pi : C^* \to B^*$ tels que $\mu = \pi \circ \iota$.

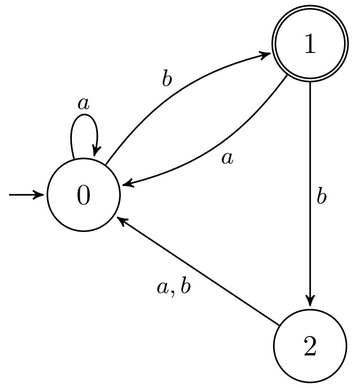
   On appelle *projection élémentaire* une projection $\pi : A^* \to B^*$ telle qu'il existe une seule lettre $a \in A$ vérifiant $\pi(a) = \varepsilon$.
4. Montrer que toute projection est la composition de projections élémentaires.
5. Montrer que toute projection élémentaire a la propriété de sélection.
6. Conclure.

Exercice 9 (Congruence à droite)**.** Une relation d'équivalence sur Σ^* est dite *congruence à droite* si pour tous $u, v, w \in \Sigma^*$, $u \equiv v$ implique $uw \equiv vw$. Elle est dite *d'index fini* si elle possède un nombre fini de classes d'équivalence. Enfin, le langage L est dit *saturé* par $\equiv$ si pour tout $u \in \Sigma^*$, pour tout $v \in L$, $u \equiv v$ implique $u \in L$.

1. Montrer que $L \subset \Sigma^*$ est reconnaissable ssi il est saturé par une congruence à droite d'index fini.
2. On définit $\equiv_L^r$ par $u \equiv_L^r v$ si $\forall y \in \Sigma^*$, $uy \in L \Leftrightarrow vy \in L$. Montrer que $\equiv_L^r$ est la congruence à droite la plus grossière qui sature L.
3. Faire le lien entre $\equiv_L^r$ et l'automate minimal de L.

Exercice 10 (Reconnaissance par monoïde)**.**

1. Donner un monoïde fini M, un morphisme φ et une partie P de M qui permettent de reconnaître le langage accepté par l'automate suivant :



2. En utilisant la représentation par monoïdes, montrer que les langages reconnaissables sont clos par union, intersection et complémentaire.
3. En utilisant la représentation par monoïdes, montrer que les langages reconnaissables sont clos par quotient. Si L est reconnaissable et $K \in \Sigma^*$, alors $K^{-1}L$ et LK^{-1} sont reconnaissables.
4. En utilisant la représentation par monoïdes, montrer que les langages reconnaissables sont clos par concaténation. Si L_1 et L_2 sont reconnus par $\varphi_1 : \Sigma^* \to M_1$ et $\varphi_2 : \Sigma^* \to M_2$ respectivement, on pourra considérer

$$\begin{aligned} \psi : \quad & \Sigma^* \to 2^{M_1 \times M_2} \\ & w \mapsto \{(\varphi_1(u), \varphi_2(v)) \mid w = uv\} \,. \end{aligned}$$

Exercice 11 (Langages apériodiques)**.**

1. Un automate fini déterministe complet a un *compteur* s'il existe un entier $n > 1$, une séquence d'états distincts $q_0, \ldots, q_{n-1}$ et un mot w de Σ^* tels que $\delta(q_i, w) = q_{i+1 \bmod n}$ pour tout i de 0 à $n - 1$.

   Montrer qu'un langage de Σ^* est apériodique si et seulement si son automate minimal n'a pas de compteur.
2. Montrer que si un langage est sans étoile, alors il est apériodique (utiliser les réponses de l'exercice précédent sur la reconnaissance par monoïde).
3. Pour chacun des langages suivants, montrer s'il est apériodique ou non :
   (a) $(ab)^*$,
   (b) $(aa)^*$,
   (c) $(a(ab)^*b)^*$,
   (d) $(ab + ba)^*$.