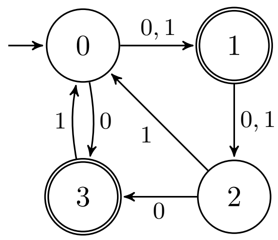
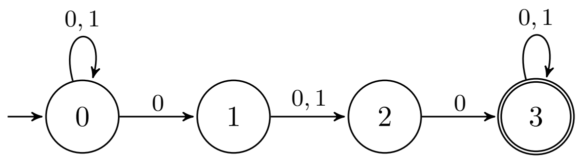
TD 1 : Automates finis

Exercice 1 (Déterminisation)**.**

1. Donner un automate fini déterministe équivalent à l'automate suivant :



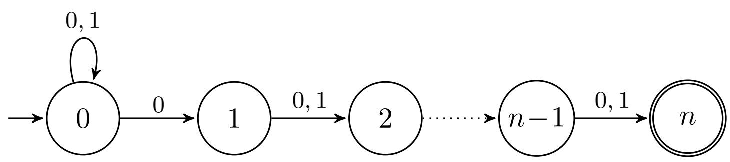
2. Donner une automate fini déterministe équivalent à l'automate suivant :



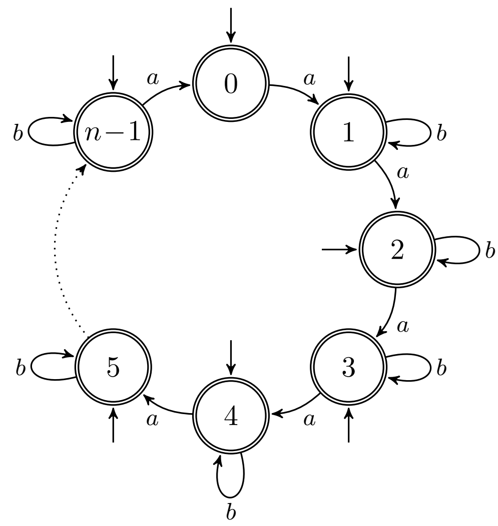
3. Montrer que l'automate des parties déterministe obtenu à partir de l'automate suivant a 2^n états. On pourra utiliser l'ensemble suivant :

$$P-1 = \{i - 1 \mid i \neq 1 \in P\}$$

où P est un sous-ensemble de $\{1, \ldots, n\}$.



4. Quelle est la taille de l'automate des parties pour l'automate suivant ?



Exercice 2 (Construction d'automates)**.** On note $\Sigma = \{0, 1\}$.

1. Donner un automate qui reconnaît le langage des multiples de 3 en base 2 où la représentation des entiers est « big-endian »(i.e. les bits sont rangés du plus fort au plus faible).
2. Donner un automate déterministe qui reconnaît les mots de Σ^* qui représentent les entiers non divisibles par 3 en notation « little-endian ».
3. Donner un automate qui reconnaît les langages :
   (a) $L_1 = \{u \in \Sigma^* :$ toute occurence de 1 est suivie de deux occurences de a$\}$
   (b) $L_2 = \{u \in \Sigma^* :$ u ne contient pas deux occurences de 0 successives$\}$
   (c) $L_3 = \{u \in \Sigma^* :$ le nombre d'occurence de 1 est pair$\}$

Exercice 3 (Reconnaissance de Langage)**.** On se place sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Dire si les langages suivants sont reconnaissables : $L = \{|u|_a = |u|_b\}$, $L = \{a^p b^q : p \geq q\}$, $L = \{a^p b^q : p \geq q \text{ et } q \leq 2012\}$, $L = \{|u|_a \neq |u|_b\}$, $L = \{a^p b^q : p \neq q\}$, $L = \{|u|_a = 2^{|u|_b}\}$, $L = \{ww : w \in \{a, b\}^*\}$, $L = \{a^{2^n} : n \in \mathbb{N}\}$.

Exercice 4 (Application du lemme d'itération)**.** On se place sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. On pose $L_0 = \{uvw : u, w \in \Sigma^* \text{ et } v \in \{aaa, bbb\}\}$, et $L_1 = \{(aab)^n (abb)^n : n \in \mathbb{N}\}$.

1. Donner un automate fini déterministe qui reconnaît L_0.
2. Donner une expression régulière représentant L_0.
3. Quelle condition (sur la longueur) satisfont les mots de L_1 ?
4. Quels facteurs de longueur 3 est impossible dans un mot de L_1 ? Que pouvez-vous en déduire pour L_0 et L_1 ?

5. Dire si le langage L_1 est reconnaissable.
6. Dire si le langage $L_0 \cup L_1$ est reconnaissable.

Exercice 5 (Dérivées partielles, automate d'Antimirov)**.** La *dérivée partielle* $\partial_a(E)$ d'une expression rationnelle E sur Σ par une lettre a de Σ est l'ensemble d'expressions rationnelles sur Σ défini par

$$\begin{aligned}
\partial_a(\underline{\emptyset}) &= \emptyset \\
\partial_a(\underline{\varepsilon}) &= \emptyset \\
\partial_a(\underline{b}) &= \begin{cases} \{\underline{\varepsilon}\} & \text{si } a = b \\ \emptyset & \text{sinon} \end{cases} \\
\partial_a(E+F) &= \partial_a(E) \cup \partial_a(F) \\
\partial_a(E^*) &= \partial_a(E) \cdot E^* \\
\partial_a(EF) &= \begin{cases} \partial_a(E) \cdot F & \text{si } \varepsilon \notin \mathcal{L}(E) \\ \partial_a(E) \cdot F \cup \partial_a(F) & \text{sinon} \end{cases}
\end{aligned}$$

où l'opération de concaténation est étendue de manière évidente aux ensembles d'expressions rationnelles.

On étend cette définition à des mots w de Σ^* et des ensembles d'expressions rationnelles S par

$$\begin{aligned}
\partial_\varepsilon(E) &= \{E\} \\
\partial_{wa}(E) &= \partial_a(\partial_w(E)) \\
\partial_w(S) &= \bigcup_{E \in S} \partial_w(E) \ .
\end{aligned}$$

1. Calculer les dérivées partielles de $(ab+b)^*ba$ par a et b.
2. Montrer que pour toute expression rationnelle E sur Σ et tout mot w de Σ^*, $\mathcal{L}(\partial_w(E)) = w^{-1}\mathcal{L}(E)$.
3. Utiliser les dérivées partielles pour construire un automate (que l'on montrera fini plus tard) équivalent à une expression rationnelle.
4. On note l'ensemble des suffixes propres d'un mot w par

   $$\mathrm{Suf}(w) = \{v \in \Sigma^+ \mid \exists u \in \Sigma^*, w = uv\} \ .$$

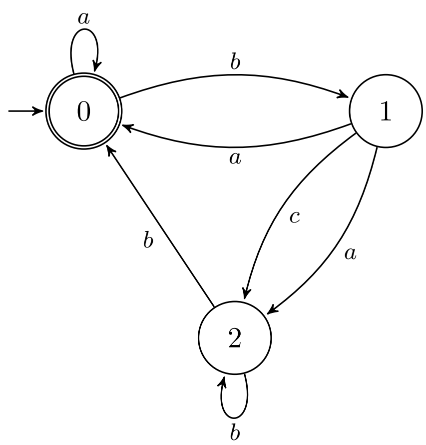
   Montrer les égalités et inégalités suivantes pour tout mot w de Σ^* et expressions E et F sur Σ :

   $$\begin{aligned}
   \partial_w(E+F) &= \partial_w(E) \cup \partial_w(F) \\
   \partial_w(EF) &\subseteq \partial_w(E) \cdot F \cup \bigcup_{v \in \mathrm{Suf}(w)} \partial_v(F) \\
   \partial_w(E^*) &\subseteq \bigcup_{v \in \mathrm{Suf}(w)} \partial_v(E) \cdot E^*
   \end{aligned}$$

5. Soit $\|E\|$ le nombre d'occurrences de lettres de Σ dans l'expression E. Montrer que l'ensemble des dérivées partielles différentes de E contient au plus $\|E\| + 1$ éléments.

Exercice 6 (Algorithme de Brzozowski et McCluskey)**.** Un automate *généralisé* sur l'alphabet Σ utilise une relation de transition sur $Q \times 2^{\Sigma^*} \times Q$. Une exécution dans un tel automate reconnaît la concaténation des langages des transitions, et le langage reconnu par l'automate est l'union de ces exécutions.

1. Montrer que si $\mathcal{A}$ est un automate généralisé, alors on peut construire un automate généralisé $\mathcal{B}$ équivalent tel qu'il existe exactement une transition entre chaque paire d'états de $\mathcal{B}$.
2. Montrer que si $\mathcal{A} = \langle Q \uplus \{q, i, f\}, \delta, \{i\}, \{f\} \rangle$ est un automate généralisé sur Σ, alors il existe un automate généralisé équivalent avec pour ensemble d'états $Q \uplus \{i, f\}$, c'est-à-dire que l'on peut éliminer q de l'ensemble des états de $\mathcal{A}$.
3. En déduire que si L est reconnu par un automate généralisé $\mathcal{A}$, alors L appartient à la clôture rationnelle des étiquettes des transitions de $\mathcal{A}$.
4. Appliquer cette construction au calcul d'une expression rationnelle équivalente à l'automate suivant :



5. On considère l'alphabet $\Sigma_n = \{1, \ldots, n\} \times \{1, \ldots, n\}$ des paires sur $\{1, \ldots, n\}$. Pour une paire (i, f) de Σ_n, on définit

$$L_{i,f} = \{(a_1, a_2)(a_2, a_3), \ldots, (a_m, a_{m+1}) \in \Sigma_n^m \mid m \geq 1, a_1 = i, a_{m+1} = f\}$$

l'ensemble des chemins de i à f dans le graphe complet défini par Σ_n.

(a) Montrer que $L_{i,f}$ est reconnu par un automate fini de taille $O(n^2)$.

(b) Quelle est la taille de l'expression rationnelle que vous obtenez à partir de cet automate ?