Décidabilité de la théorie RPO

Devoir à rendre au plus tard le 12 mars 2012

6 mars 2012

1 Préliminaires

Soit A un alphabet fini et $A^\star$ l'ensemble des mots sur A, où ϵ désigne le mot de vide. On note X l'ensemble des variables et $T(\Sigma)$ l'ensemble des termes sur la signature Σ.

Il y a une correspondance entre les mots et les termes, de telles sortes à ce que les lettres soient des fonctions unaires et tout mot $a_1 a_1 \ldots a_n$ soit associé au terme $a_1(a_2(\ldots a_n() \ldots))$, où x appartient à X. On considère un ordre total $>$ dit de *précédence* sur A.

Un ordre sur les termes est un *ordre de réduction* s'il est monotone, stable par substitution et bien fondé.

Un *ordre récursif sur les chemins* est défini sur les mots de la manière suivante : s est plus grand que t pour l'ordre RPO, et on écrit $s \succ^A_{\mathsf{rpo}} t$ si et seulement si l'une des conditions suivantes est vérifiée :

1. $s \neq \epsilon$ et $t = \epsilon$
2. $s = as'$ et $t = bt'$ et ou bien
   (a) $a > b$ et $s \succ^A_{\mathsf{rpo}} t'$ ou bien
   (b) $a = b$ et $s' \succ^A_{\mathsf{rpo}} t'$ ou bien
   (c) $b > a$ et $(s' \succ^A_{\mathsf{rpo}} t$ ou $s' = t)$

Question 1

1. L'*ordre récursif sur les chemins* est un ordre de réécriture. Démontrer qu'il vérifie la propriété dite de *sous-terme*, i.e. si s est un sous-terme de t, alors t est plus grand que s pour l'ordre RPO.
2. Démontrer que si $s \succ_{\mathsf{rpo}} t$, alors pour tout mot w, $ws \succ_{\mathsf{rpo}} wt$.
3. Soit $a \in A$ et $s \succ_{\mathsf{rpo}} t$.
   Démontrer que pour tout mot w tel que $a \succ_{\mathsf{rpo}} w$, on a $as \succ_{\mathsf{rpo}} wat$.
4. Soient $w_1, w_2, \ldots, w_k, u_1, u_2, \ldots, u_k$ deux sequences de mots tels que chaque lettre de chaque mot est strictement plus petite que a une lettre de A.
   Montrer que si $w \succ_{\mathsf{rpo}} w'$, alors :

$$aw_1aw_2 \ldots aw_kaw \succ_{\mathsf{rpo}} au_1au_2 \ldots au_kaw'$$

Question 2

On note $\max(w, A)$ la lettre maximale de A (pour l'ordre sur A) et $\mathsf{mult}(w, A)$ le nombre d'occurrences de cette lettre dans w. Démontrer que chacune des trois conditions suivantes :

1. $\max(w, A) > \max(w', A)$
2. $\max(w, A) = \max(w', A)$ et $\mathsf{mult}(w, A) > \mathsf{mult}(w', A)$
3. $a = \max(w, A) = \max(w', A), \mathsf{mult}(w, A) = \mathsf{mult}(w', A), w = w_0 a w_1 a w_2 \dots a w_k,\ w' = u_0 a u_1 a u_2 \dots a u_k$ et il existe $0 \le i \le k$ tels que $w_i \succ_{\mathsf{rpo}} u_i$ et pour tout $j > i$, on a $w_j = u_j$

est équivalente à $w \succ_{\mathsf{rpo}} w'$.

Question 3

On dit qu'une relation R sur A^* est reconnaissable si $\{v\#w | vRw\}$ est reconnaissable ($\#$ est un symbole n'appartenant pas à A).

Expliquer pourquoi la relation $\prec_{\mathsf{rpo}}$ ne peut être reconnue par un automate de mots.

2 Reconnaissance de rpo

2.1 Encodage des mots par les arbres

Introduisons la signature F suivante : F contient un symbole binaire pour chaque lettre a de A (on notera ce symbole a par abus de notation) et un constante ϵ_a pour chaque $a \in A$.

Soit m (resp. o) l'élément maximal (resp. minimal) de A. Posons a' le successeur de a dans A pour l'ordre $>$. On définit une fonction $\tau : A^* \to T(F)$ de traduction des mots dans les arbres comme suit. On commencera par définir les fonctions τ_a pour $a \in A$, et on prendra $\tau = \tau_m$

$$\begin{array}{rcll}
\tau_{a'}(w_1 a' w_2) & = & a'(\tau_a(w_2), \tau_{a'}(w_1)) & \text{si } a' \notin w_2 \\
\tau_{a'}(w) & = & a'(\tau_a(w), \epsilon_{a'}) & \text{si } a' \notin w \\
\tau_o(w.o) & = & o(\epsilon_o, \tau_o(w)) & \\
\tau_o(\epsilon) & = & o(\epsilon_o, \epsilon_o) &
\end{array}$$

On admettra que τ est injective.

Question 4

Donner l'arbre correspondant à $\tau(caacb)$

Question 5

1. Si $|w|_m = l$ combien de fois $\tau(w)$ contient-il le symbole m
2. Donner une borne sur la taille de $\tau(w)$ en fonction de la taille de w

Question 6

Montrer que $\tau(A^*)$ est reconnaissable par un automate d'arbre.

2.2 Produits d'arbres

On définit maintenant le produit de deux arbres dans $T(F)$.

Commençons par étendre F avec un nouveau symbole $\perp$. On notera fg le nouveau symbole de fonction associé à $(f,g) \in (F \cup \perp)^2$. On définit la signature $F^2 = \{fg | f, g \in F \cup \{\perp\}\}$ où fg a pour arité le maximum de l'arité de f et de celle de g ($\perp$ est d'arité 0).

On code le couple d'arbres $(t_1, t_2) \in T(F)^2$ par l'arbre produit $t_1 \otimes t_2 \in T(F^2)$ définit récursivement comme suit :

$$\begin{array}{rcl} f(s_1, \cdots, s_n) \otimes g(r_1, \cdots, r_k) & = & fg\left(s_1 \otimes r_1, \cdots, s_{\max(k,n)} \otimes r_{\max(k,n)}\right) \\ & & \quad \text{où } s_l = \perp \text{ si } l > n \text{ et } r_l = \perp \text{ si } l > k \\ f(s_1, \cdots, s_n) \otimes \perp & = & f\perp(s_1 \otimes \perp, \cdots, s_n \otimes \perp) \\ \perp \otimes f(s_1, \cdots, s_n) & = & \perp f(\perp \otimes s_1, \cdots, \perp \otimes s_n) \end{array}$$

On étends cette notation aux langages par $L \otimes L' = \{t \otimes t' | t \in L, t' \in L'\}$

Question 7

Montrer que si $L \subseteq T(F)$ et $L' \subseteq T(F)$ sont reconnaissables par des automates d'arbres alors $L \otimes L'$ l'est encore.

Question 8

Montrer que le langage $\{\tau(av) \otimes \tau(v) | v \in A^*\}$ est reconnaissable par un automate d'arbre.

Question 9

Montrer que le langage $\{\tau(w) \otimes \tau(v) | w \succ_{\mathsf{rpo}} v\}$ est reconnaissable par un automate d'arbres.

3 Décidabilité de la théorie RPO du premier ordre

On définit une formule RPO comme une formule du premier ordre construite à partir de termes sur la signature A et les symboles de prédicats "$\succ$" et "$=$".

Une formule est interprétée dans $T(A)$, en interprétant $\succ$ par $\succ_{\mathsf{rpo}}$ et $=$ par l'identité. On note $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ une formule RPO avec $x_1, \ldots, x_n$ des variables libres.

Une *formule plate* ("*flat formula*" en anglais) est une formule RPO dont les atomes sont de la forme $x = y, x = ay, x = a, x \succ y, a \succ x$ ou $x \succ a$, où x et y sont des variables.

Question 10

Montrer qu'il existe une transformation des formules RPO vers les formules RPO plates préservant les solutions.

Question 11

Étant donnée une formule RPO, $\phi(x_1, \ldots, x_n)$, montrer que le langage

$$\{u_1 \otimes \ldots \otimes u_n \mid u_1, \ldots, u_n \text{ satisfait la formule } \phi\}$$

est reconnaissable par un automate d'arbres.