Magistère d'Informatique
ENS de Cachan
Langages formels 2007-2008

TD 6
–
Automates à pile

Exercice 1 *(Exemples d'automates à pile)*

1. Construire un automate à pile reconnaissant par pile vide le langage $L = \{a^n b^p \mid 0 < n \leq p \leq 2n\}$.
2. Construire un automate à pile reconnaissant le langage de Dyck D_n^*.
3. Construire un automate à pile reconnaissant le langage $L = \{w\tilde{w} \mid w \in \Sigma^*\}$ et son complémentaire.
4. Construire un automate à pile reconnaissant le complémentaire du langage $L = \{ww \mid w \in \Sigma^*\}$.

Exercice 2 *(Variantes d'automates à pile)*
Soit $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, Z, T, q_0, z_0, F)$ un automate à pile.

1. Montrer que l'on peut construire un automate à pile équivalent $\mathcal{A}'$ tel que $T' \subseteq Q' \times Z' \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times Q' \times Z^{\leq 2}$.
2. Montrer que l'on peut construire un automate à pile équivalent $\mathcal{A}'$ tel que les mouvements de la pile sont uniquement de type push ou pop.

Exercice 3 *(Ensembles calculables)*
Soit $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, Z, T, q_0, z_0, F)$ un automate à pile. Vous avez vu que l'on peut effectivement calculer l'ensemble X suivant :

$$X = \{(p, x, q) \in Q \times Z \times Q \mid \exists (p, x) \xrightarrow{*} (q, \varepsilon)\}.$$

En utilisant X montrer que l'on peut effectivement calculer les ensembles Y, V et W définis ci-dessous :

$$Y = \{(p, x, q, y) \in Q \times Z \times Q \times Z \mid \exists (p, x) \xrightarrow{*} (q, hy)\}$$
$$V = \{(p, x) \in Q \times Z \mid \exists (p, x) \xrightarrow{\omega}\}$$
$$W = \{(p, x, q, y) \in Q \times Z \times Q \times Z \mid \exists (p, x) \xrightarrow{*} (q, y)\}.$$

Exercice 4 *(Le langage d'une pile est rationnel)*
On considère des systèmes dont le fonctionnement peut être modélisé par

une variante d'automate à pile qui n'a pas de canal d'entrée ; celui-ci évolue donc en fonction seulement de l'état de contrôle et de la lettre en haut de la pile.

Définition *Un système à pile S est un quadruplet $S = (Q, \Gamma, \delta, q_0)$ où Q, Γ, δ, q_0 sont respectivement, l'ensemble des états de contrôle, l'alphabet de pile, la relation de transition $\delta \subseteq (Q \times (\Gamma \cup \{\varepsilon\})) \times (Q \times \Gamma^*)$, et l'état (de contrôle) initial.*

Définition *Un état de S est un couple (q, α) où $q \in Q$ est un état de contrôle et $\alpha \in \Gamma^*$ un mot de pile. L'état initial de S est (q_0, ε). Un état (q', α') est directement accessible à partir d'un état (q, α), noté $(q, \alpha) \Rightarrow (q', \alpha')$, si $\alpha = \beta a$, $\alpha' = \beta u'$ et $((q, a), (q', u')) \in \delta$. La fermeture réflexive et transitive de $\Rightarrow$ est notée $\Rightarrow^*$.*

Notation *On notera une transition $((q, \varepsilon), (q', a))$ par (q, a_+, q') ; de même une transition $((q, a), (q', \varepsilon))$ sera notée (q, a_-, q').*

Définition *Le langage de la pile de S dans l'état q, noté $L(S, q)$, est défini par : $L(S, q) = \{\alpha \in \Gamma^*; (q_0, \varepsilon) \Rightarrow^* (q, \alpha)\}$. Le langage de la pile de S , noté $L(S)$, est la réunion des $L(S, q)$ pour $q \in Q$.*

1. Expliquer comment on peut simuler un système à pile S quelconque par un autre ayant une relation de transition dans $\{(Q \times \Gamma) \times (Q \times \{\varepsilon\})\} \cup \{(Q \times \{\varepsilon\}) \times (Q \times \Gamma)\}$.

   On considère dans toute la suite de l'exercice que δ satisfait cette contrainte et peut donc être représentée par un ensemble fin de triplets (q, x, q') où chaque $x \in \{a_-, a_+, b_-, b_+\}$ quand $\Gamma = \{a, b\}$. On associe alors à un système à pile $S = (Q, \Gamma, \delta, q_0)$ l'automate fin $S' = (Q, \Gamma, \delta', q_0, Q)$ avec $\delta' \subseteq Q \times (\Gamma \cup \{\varepsilon\}) \times Q$ est la plus petite relation satisfaisant les conditions suivantes :
   – si $(q, a_+, q') \in \delta$, alors $(q, a, q') \in \delta'$, et
   – si $(q, a_-, q') \in \delta$ et $(q'', a, q) \in \delta'^+$ alors $(q', \varepsilon, q') \in \delta'$, où δ'^+ représente la fermeture transitive de δ'.

2. Soit S_1 le système à pile $S_1 = (\{q_1, q_2, q_3\}, \{a, b\}, \delta_1, q_1)$ où δ_1 est l'ensemble

   $$\{(q_1, a_+, q_2), (q_2, b_+, q_3), (q_3, b_-, q_1), (q_1, b_+, q_3)\}.$$

   Dessiner S_1 et l'automate associé S'_1.

3. Montrer que (q, α) est accessible à partir de (q_0, ε) dans S si et seulement si q est accessible dans S' par le mot α.
4. Montrer que pour tout $q \in Q$, le langage $L(S, q)$ est rationnel ; en conclure que le langage de la pile, $L(S)$, est aussi rationnel.
5. Expliquer comment calculer δ' et prouver la terminaison de votre algorithme.