Magistère d'Informatique
ENS de Cachan
Langages formels

TD 5

Exercice 1 *(Grammaires réduites)*

Soit $G = (\Sigma, V, P, S)$ une grammaire algébrique.

1. Montrer que l'on peut
   - Calculer l'ensemble des variables productives de G;
   - Décider si $\mathcal{L}_G(S) = \emptyset$;
   - Calculer l'ensemble des variables accessibles de G.
2. On suppose que $\mathcal{L}_G(S) \neq \emptyset$. Montrer que l'on peut effectivement construire un grammaire réduite équivalente à G.

Exemple Réduire la grammaire suivante:

$$\begin{array}{ll} S \to aT \ + \ bTU \ + \ abTS \ + \ UV & \qquad V \to aU \ + \ bU \\ T \to aU \ + \ bT \ + \ a & \qquad V \to aT \ + \ bS \ + \ a \end{array}$$

Exercice 2 *(Grammaires propres)*

Soit $G = (\Sigma, V, P, S)$ une grammaire algébrique.

1. Montrer que l'on peut calculer l'ensemble des variables x telles que $\varepsilon \in \mathcal{L}_G(x)$.
2. Montrer que l'on peut effectivement construire une grammaire propre qui engendre $\mathcal{L}_G(S) \setminus \{\varepsilon\}$.

Exemple Rendre propre la grammaire suivante:

$$\begin{array}{ll} S \to TU \ + \ VW \ + \ X & \qquad V \to U \ + \ W \ + \ XaV \\ T \to TT \ + \ W & \qquad U \to cW \ + \ \varepsilon \\ U \to aU \ + \ V & \qquad X \to W \ + \ b \end{array}$$

Exercice 3 *(Forme normale de Chomsky)*

Soit $G = (\Sigma, V, P, S)$ une grammaire algébrique.

1. Montrer que l'on peut construire une grammaire équivalente G' en forme normale de Chomsky faible (resp. forte).

2. Montrer que l'on peut dcider si $\mathcal{L}_G(S)$ est fini.

Exemple Mettre la grammaire suivante sous forme normale de Chomsky forte:

$$\begin{array}{l} S \rightarrow bA \ + \ aB \\ A \rightarrow bAA \ + \ aS \ + \ a \\ B \rightarrow aBB \ + \ bS \ + \ b \end{array}$$

Exercice 4 *(Forme normale de Greibach)*

Soit $G = (\Sigma, V, P, S)$ une grammaire algébrique de langage associé non-vide.
G est en forme normale presque Greibach si toutes les productions de P sont de la forme $X \rightarrow a\alpha$ avec $a \in \Sigma$ et $\alpha \in (V \cup \Sigma)^*$.
G est en forme normale de Greibach si toutes les productions de P sont de la forme $X \rightarrow a\alpha$ avec $a \in \Sigma$ et $\alpha \in V^*$.

1. Soit G une grammaire algébrique, $X \rightarrow \alpha_1 Y \alpha_2$ une règle de P et soit
$$Y \rightarrow \beta_1 + \ldots + \beta_m$$
l'ensemble des règles de P ayant Y comme membre gauche. Montrer que la grammaire G' obtenue en remplaçant la règle $X \rightarrow \alpha_1 Y \alpha_2$ par les règles $X \rightarrow \alpha_1 \beta_i \alpha_2$ (pour $1 \leq i \leq m$) engendre le même langage que G.
2. Soit G une grammaire algébrique propre, $X \rightarrow X\alpha_1 + \ldots + X\alpha_r$ l'ensemble des règles de P ayant X comme membre gauche et X comme symbole le plus à gauche dans les membres droits, $X \rightarrow \beta_1 + \ldots + \beta_s$ le reste des règles de P ayant X comme membre gauche. Montrer que la grammaire G' obtenue en ajoutant une variable Z et en remplaçant l'ensemble des règles ayant X comme membre gauche par les règles
$$X \ \rightarrow \ \beta_1 Z \ + \ \ldots \ + \ \beta_s Z \ + \ \beta_1 \ + \ \ldots \ + \ \beta_s$$
et
$$Z \ \rightarrow \ \alpha_1 Z \ + \ \ldots \ + \ \alpha_r Z \ + \ \alpha_1 \ + \ \ldots \ + \ \alpha_r$$
engendre le même langage que G.
3. On considère une grammaire algébrique $G = (\Sigma, V, P, S)$, propre et réduite. On suppose que $V = \{X_1, \ldots, X_n\}$ et $S = X_1$. Montrer que l'on peut construire une suite $(G_i)_{0 \leq i \leq n}$ de grammaires engendrant le même langage que G telles que $G_0 = G$ et pour tout $0 \leq i \leq n$, G_i a pour ensemble de non-terminaux $V_i = V \cup \{Z_1, \ldots, Z_i\}$ et vérifie que pour toute règle $X_k \rightarrow \gamma$,

- γ ne commence pas par un non-terminal de $\{X_1, \ldots, X_k\} \cup \{Z_1 \ldots Z_k\}$ si $k \leq i$,
- γ ne commence pas par un non-terminal de $\{X_1, \ldots, X_i\} \cup \{Z_1 \ldots Z_i\}$ si $k > i$

En déduire qu'on peut obtenir à partir de G_n une grammaire algébrique sous forme normale de Greibach engendrant le même langage que G.

Exemple Mettre la grammaire suivante sous forme normale de Greibach:

$$\begin{aligned} A_1 &\to A_2 A_3 \\ A_2 &\to A_3 A_1 \ + \ b \\ A_3 &\to A_1 A_2 \ + \ a \end{aligned}$$

Exercice 5 *(Problème du mot)*

Soit G une grammaire propre en forme normale de Chomsky forte. Montrer que l'on peut décider si un mot $u \in \Sigma^*$ est engendré par G en temps polynomial.

Exercice 6 *(Problèmes indécidables)*

On rappelle que le problème suivant, dit de la *correspondance de Post*, est indécidable:

> Soient $u_1, \ldots, u_k$ et $v_1, \ldots, v_k$ deux listes de même longueur dont les éléments sont des mots sur un certain alphabet Σ. Existe-t-il une suite d'indices $i_1, \ldots, i_n$ (avec $n > 0$) telle que $u_{i_1} \ldots u_{i_n} = v_{i_1} \ldots v_{i_n}$?

Soient L et L' des langages algébriques. Montrer que les problèmes suivants sont indécidables en général:

1. Ł $\cap L' = \emptyset$?
2. $L = \Sigma^*$?
3. L est ambigu?