Magistère d'Informatique 2007-2008
ENS de Cachan
Langages formels

TD 13

–

Automates d'arbres

Exercice 1

Pour chacun des langages d'arbres suivants, déterminer si il est reconnaissable. Pour cela, on exhibera un automate d'arbre le reconnaissant, ou on prouvera qu'il n'en existe pas. Dans le premier cas, décider s'il est ou non reconnaissable par un automate déterministe descendant.

- L'ensemble des formules du calcul propositionnel sur un ensemble de variables propositionnelles vide et qui s'évaluent en vrai.
- L'ensemble des formules du calcul propositionnel sur un ensemble fini $\mathcal{P}$ de variables propositionnelles fixé et qui sont satisfaisables.
- Etant donnés $\mathcal{F} = \{f/2, g/1, a/0\}$ et le terme $t = f(f(a, x), g(y))$. On définit l'ensemble

  $$G(t) = \{f(f(a, u), g(v)) \mid u, v \in T(\mathcal{F})\}$$

  des instances de t. Considérer le langage d'arbres associé à $G(t)$.
- Etant donnés $\mathcal{F} = \{f/2, g/1, a/0\}$ et le terme $t = f(a, g(x))$. On définit l'ensemble

  $$M(t) = \{C[t'] \mid C \in \mathcal{C}(\mathcal{F}),\ t' \in G(t)\}$$

  des termes ayant une instance de t comme sous-terme. Considérer le langage d'arbres associé à $M(t)$.
- Soit $\mathcal{F} = \{f/2, a/0\}$. Considérer l'ensemble

  $$L = \{t \in T(\mathcal{F}) \mid |\mathsf{dom}(t)| \text{ est un nombre premier}\}.$$

- Soit $\mathcal{F} = \{f/2, a/0\}$. Considérer l'ensemble

  $$L = \{f(t, t) \mid t \in T(\mathcal{F})\}.$$

Exercice 2

Soit $\mathcal{F} = \{f/2, a/0, b/0\}$.

1. Considérons l'ensemble des termes clos L_1 défini par les deux conditions suivantes :
   - $f(a, b) \in L_1$
   - $t \in L_1 \ \Rightarrow\ f(a, f(t, b)) \in L_1$

   Montrer que L_1 est reconnaissable.

2. Montrer que l'ensemble $L_2 = \{t \in T(\mathcal{F}) \mid |t_a| = |t_b|\}$ n'est pas reconnaissable.
3. Soit L un langage d'arbres sur $\mathcal{F}$ reconnaissable. Supposons que f est un symbole commutatif. Soit $C(L)$ la clôture par congruence de l'ensemble L pour l'ensemble d'équations $C = \{f(x,y) = f(y,x)\}$. Montrer que $C(L)$ est reconnaissable.
4. Soit L un langage d'arbres sur $\mathcal{F}$ reconnaissable. Supposons que f est un symbole commutatif et associatif. Soit $AC(L)$ la clôture par congruence de l'ensemble L pour l'ensemble d'équations $AC = \{f(x,y) = f(y,x), f(x,f(y,z)) = f(f(x,y),z)\}$. Montrer que $AC(L)$ n'est en général pas reconnaissable.
5. Soit L un langage d'arbres sur $\mathcal{F}$ reconnaissable. Supposons que f est un symbole associatif. Soit $A(L)$ la clôture par congruence de l'ensemble L pour l'ensemble d'équations $A = \{f(x,f(y,z)) = f(f(x,y),z)\}$. Montrer que $A(L)$ n'est en général pas reconnaissable.

Exercice 3

Montrer que la classe des langages d'arbres reconnaissables est close par les opérations booléennes (union, intersection et complémentaire). Proposer des constructions préservant le déterminisme ascendant.

Exercice 4

Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ deux ensembles de symboles de fonctions, éventuellement non disjoints. Pour tout $n > 0$ tel que $\mathcal{F}$ contient un symbole d'arité n, nous définissons un ensemble de variables $\mathcal{X}_n = \{x_1, \dots, x_n\}$.

Soit $h_\mathcal{F}$ une application, qui à tout élément $f \in \mathcal{F}$ d'arité n, associe un terme $t_f \in T(\mathcal{F}', \mathcal{X}_n)$. L'*homomorphisme d'arbre* $h : T(\mathcal{F}) \to T(F')$ *déterminé par* $h_\mathcal{F}$ est défini inductivement par :

- $h(a) = t_a \in T(\mathcal{F}')$ pour tout $a \in \mathcal{F}$ d'arité 0,
- $f(f(t_1, \dots, t_n)) = t_f\{x_1 \leftarrow h(t_1), \dots, x_n \leftarrow h(t_n)\}$.

Un *homomorphisme* est dit *linéaire* si pour tout $f \in \mathcal{F}$ d'arité n, $h_\mathcal{F}(f) = t_f$ est un terme linéaire de $T(\mathcal{F}', \mathcal{X}_n)$.

Exemple Soient $\mathcal{F} = \{g/3, a/0, b/0\}$ et $\mathcal{F}' = \{f/2, a/0, b/0\}$. On définit l'application suivante :

$$h_\mathcal{F} : \begin{cases} \mathcal{F} & \to & T(\mathcal{F}', \mathcal{X}_3) \\ g & \mapsto & f(x_1, f(x_2, x_3)) \\ a & \mapsto & a \\ b & \mapsto & b \end{cases}$$

Calculer l'image par l'homomorphisme associé à $h_\mathcal{F}$ du terme $g(a, g(b,b,b), a)$.
Démontrer les propriétés de clôture suivantes :

1. Soient h un homomorphisme d'arbres et L un langage d'arbres reconnaissable, alors $h^{-1}(L)$ est un langage d'arbres reconnaissable.
2. Soient h un homomorphisme d'arbres linéaire et L un langage d'arbres reconnaissable, alors $h(L)$ est un langage d'arbres reconnaissable.

Donner un exemple d'homomorphisme non linéaire h et d'un langage d'arbres reconnaissable, tels que $h(L)$ ne soit pas reconnaissable.

Exercice 5

La taille $||t||$ d'un arbre t est définie par induction :

$$\begin{cases} ||t|| = 1 \text{ si } t \text{ est une feuille} \\ ||t|| = 1 + \sum_{i=1}^{i=n} t_i \text{ si } t = f(t_1, \dots, t_n). \end{cases}$$

La taille $||\mathcal{A}||$ d'un automate d'arbres $\mathcal{A} = (Q, F, Q_f, \Delta)$ est définie par :

$$||\mathcal{A}|| = |Q| + \sum_{(f(q_1,\dots,q_n)\to q)\in\Delta} n + 2.$$

1. *Problème du mot* Un automate d'arbre $\mathcal{A}$ est fixé. On souhaite décider, étant donné un arbre t en entrée, si t est reconnu par $\mathcal{A}$. Montrer que l'on peut résoudre ce problème en temps linéaire.
2. *Problème de l'appartenance* On considère en entrée un automate d'arbres $\mathcal{A}$ et un arbre t. On souhaite décider si t est reconnu par $\mathcal{A}$. Montrer que ce problème peut être résolu en temps linéaire si $\mathcal{A}$ est déterministe, et quadratique si $\mathcal{A}$ est non déterministe.
3. *Problème du vide* Etant donné un automate d'arbres $\mathcal{A}$, on souhaite décider si le langage reconnu par $\mathcal{A}$ est vide. Montrer que ce problème peut être résolu en temps quadratique.
4. *Problème de la finitude* Etant donné un automate d'arbres $\mathcal{A}$, on souhaite décider si le langage reconnu par $\mathcal{A}$ est fini. Montrer que ce problème peut être résolu en temps quadratique.