Langages formels

6. Encore des arbres

12 mars 2007

On s'intéresse à des questions de complexité pour les automates d'arbres. La taille $\|t\|$ d'un arbre t est définie par induction par $\|f(t_1, \ldots, t_n)\| := 1 + \sum_{i=1}^{n} \|t_i\|$. La taille d'un automate d'arbre $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Delta, F)$ est défini comme $\|\mathcal{A}\| := |Q| + \sum_{(\langle q_1, \ldots, q_n \rangle, \sigma, q) \in \Delta} (n+2)$.

Exercice 1 – *Traitements sur les automates*

1. Comment définir le caractère "émondé" pour un automate d'arbre ?
   Proposer un algorithme pour émonder un automate d'arbre.
   Quel est le coût de votre algorithme ?
2. Étudier le coût de la déterminisation des automates d'arbres.

Exercice 2 – *Problèmes de décision*

Nous nous intéressons dans cet exercice à des problèmes de décision classique.

1. Appartenance : Un automate d'arbre $\mathcal{A}$ est fixé. On souhaite décider, étant donné un arbre t en entrée, si t est reconnu par $\mathcal{A}$. Montrer que l'on peut résoudre ce problème en temps linéaire.
2. Appartenance uniforme : On considère en entrée un automate d'arbre $\mathcal{A}$ et un arbre t. On souhaite décider si t est reconnu par $\mathcal{A}$. Montrer que ce problème peut être résolu en temps linéaire si $\mathcal{A}$ est déterministe, et quadratique si $\mathcal{A}$ est non déterministe.
3. Problème du vide : Étant donné un automate d'arbre $\mathcal{A}$, on souhaite décider si le langage reconnu par $\mathcal{A}$ est vide. Montrer que ce problème peut être résolu en temps quadratique.
4. Problème de la finitude : Étant donné un automate d'arbre $\mathcal{A}$, on souhaite décider si le langage reconnu par $\mathcal{A}$ est fini. Montrer que ce problème peut être résolu en temps quadratique.

Exercice 3 – *Résiduels de langages d'arbres*

Soit $\mathcal{L}$ un langage d'arbres sur Q. On définit deux classes de résiduels :

– Soit t un Q-arbre à trou. Le résiduel à gauche de $\mathcal{L}$ par t est défini par :

$$t^{-1}\mathcal{L} := \{ u \mid u \text{ Q-arbre}, t \cdot u \in \mathcal{L} \}$$

– Soit t un Q-arbre. Le résiduel à droite de $\mathcal{L}$ par t est défini par :

$$\mathcal{L}t^{-1} := \{ u \mid u \text{ Q-arbre à trou}, u \cdot t \in \mathcal{L} \}$$

Montrer qu'un langage d'arbres reconnaissable a un nombre fini de résiduels à gauche et un nombre fini de résiduels à droite. Étudier la réciproque.