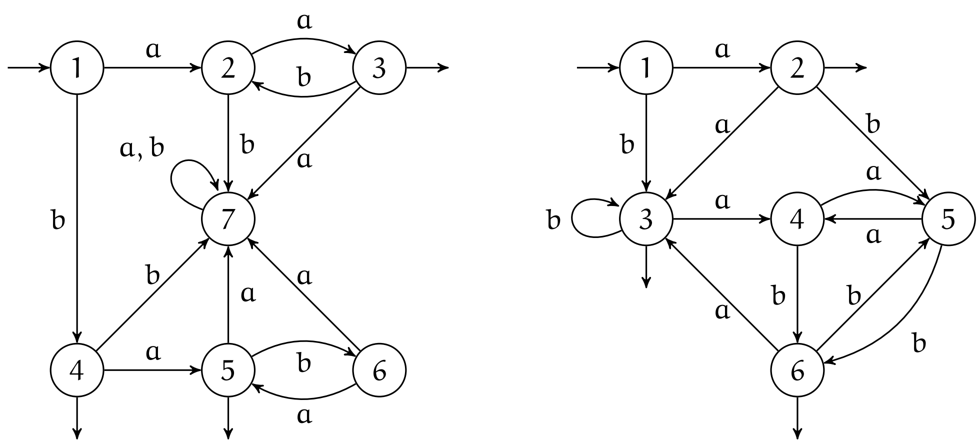
Langages formels

2. Langages réguliers, fonctions séquentielles

12 février 2007

Exercice 1 – *Minimisation*

Minimiser les automates suivants :



Exercice 2 – *Résiduels*

Calculer l'automate des résiduels du langage $L = (a(ab)^*)^* \cup (ba)^*$.

Exercice 3 – *Théorème de Brzozowski*

E, F, G désignent des expressions rationnelles sur un alphabet Σ.

1. Soit $a \in \Sigma$. Exprimer $a^{-1}(E + F)$, $a^{-1}(E.F)$, $a^{-1}E^*$ en fonction de $a^{-1}E$ et $a^{-1}F$.

2. En déduire une méthode (éventuellement ne terminant pas toujours) pour construire un automate déterministe à partir d'une expression rationnelle.

3. Appliquer cette méthode à l'expression $(a + b)^*ab(a + b)^*$.

4. Obtient-on toujours l'automate minimal associé à l'expression rationnelle ?

5. Montrer que, modulo les identités $E + E = E$, $E + F = F + E$ et $(E + F) + G = E + (F + G)$, la méthode termine.

Exercice 4 – *Congruence à droite*

Soient $L \subseteq \Sigma^*$ et $\equiv$ une congruence sur Σ^*. L est *saturé par* $\equiv$ si, pour tous $u \in \Sigma^*$ et $v \in L$, $u \equiv v$ implique $u \in L$. La congruence $\equiv$ est une *congruence à droite* si pour tous $u, v, w \in \Sigma^*$, $u \equiv v$ implique $uw \equiv vw$. Elle est *d'index fini* si elle a un nombre fini de classes d'équivalence. Étant donné L, on pose $u \equiv_L^r v$ si pour tous $y \in \Sigma^*$, $uy \in L$ si et seulement si $vy \in L$.

1. Soit $L \subseteq \Sigma^*$. Montrer que L est reconnaissable si et seulement si L est saturé par une congruence à droite d'index fini.

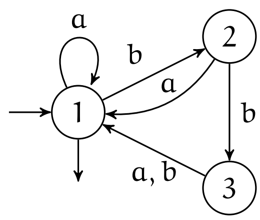
2. Montrer que $\equiv_L^r$ est la congruence à droite la plus grossière qui sature L.

3. Faire le lien entre $\equiv_L^r$ et l'automate minimal de L.

4. Application : calculer $\equiv_L^r$ pour le langage des mots terminés par ab.

Exercice 5

Donner un monoïde permettant de reconnaître le langage accepté par cet automate :



Exercice 6 – *Propriétés de clôture*

Montrer que l'ensemble des langages reconnaissables par morphismes est clos par

1. union, intersection et complémentaire,

2. quotients (i.e. si L est reconnaissable et si K est un lanage arbitraire, alors $K^{-1}L$ et LK^{-1} sont reconnaissables),

3. concaténation.

Si L_i (avec $i \in \{1,2\}$) est reconnu par $\varphi_i : \Sigma^* \to M_i$, on pourra considérer l'application $\varphi : \Sigma^* \to 2^{M_1 \times M_2}$ définie par $\varphi(w) = \{ (\varphi_1(u), \varphi_2(v)) \mid uv = w \}$.

Exercice 7 – *Opérations sur les entiers*

Dans cet exercice on considère deux représentations des entiers en base 2 (ou plus généralement en base β) : la représentation *classique* (avec le bit de poids fort en premier) et la représentation *inverse* (avec le bit de poids faible en premier).

1. Donner un transducteur séquentiel qui réalise la multiplication par 3 en base 2 (représentation inverse).

2. Donner un transducteur séquentiel qui réalise la division entière par 3 en base 2 (représentation classique).

3. On définit l'opérateur comparaison comme la fonction prenant en argument deux entiers x et y en représentation inverse et qui renvoie $\top$ si $x \geqslant y$ et $\perp$ sinon. Donner un transducteur séquentiel qui réalise la comparaison (on suppose que les codages de x et y ont même longueur).

4. On définit la soustraction comme la fonction prenant deux entiers x et y en représentation inverse et qui renvoie l'entier $x - y$ en base 2 inverse si $x \geqslant y$ et le caractère # en dernier sinon. Donner un transducteur séquentiel qui réalise la soustraction.

5. Donner un transducteur séquentiel qui reconnaît l'ensemble des représentations classiques d'entiers vérifiant $2x + 3y \equiv 1\ [6]$. De même pour $\{ x \mid \exists y.\, 2x + 3y \equiv 1\ [6] \}$.

Exercice 8 – *Double renversement*

Si $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, I, F)$ est un automate non déterministe, l'automate renversé de $\mathcal{A}$ est $\mathcal{A}^r := (Q, \Sigma, \delta^r, F, I)$ où $\delta^r := \{ (q, a, p) \mid (p, a, q) \in \delta \}$. Si $\mathcal{B}$ est un automate non déterministe, on note $D(\mathcal{B})$ le déterminisé de $\mathcal{B}$. Montrer que, pour tout automate $\mathcal{A}$, l'automate $D(D(\mathcal{A}^r)^r)$ est l'automate déterministe minimal équivalent à $\mathcal{A}$.