Langages formels

10. Automates à pile

23 avril 2007

Exercice 1 – *Exemples*

Donner des automates à pile qui reconnaissent les langages suivants :

1. $\{ w\bar{w} \mid w \in \Sigma^* \}$, où $\bar{w}$ est le miroir de w

2. le langage de Dick à n parenthèses D_n^* voir TD7, pour ceux qui ne suivent pas

3. $\{ a^n b^p \mid 0 < n \leqslant p \leqslant 2n \}$

4. $\Sigma^* \setminus \{ ww \mid w \in \Sigma^* \}$

Exercice 2 – *Variantes d'automates à pile*

Soit $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, Z, T, q_0, z_0, F)$ un automate à pile.

1. Montrer que l'on peut construire un automate à pile $\mathcal{A}'$ reconnaissant le même langage et tel que $T' \subseteq Q' \times Z \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times Q' \times Z^{\leqslant 2}$.

2. Montrer que l'on peut construire un automate à pile $\mathcal{A}''$ équivalent à $\mathcal{A}$ tel que les mouvements de la pile sont uniquement du type *push* ou *pop* ou *skip*.

Exercice 3 – *Ensembles calculables*

Soit $\mathcal{A} := (Q, \Sigma, Z, T, q_0, z_0, F)$ un automate à pile.

1. Montrer que l'on peut effectivement calculer l'ensemble X suivant :

$$X := \{ (p, x, q) \in Q \times Z \times Q \mid (p, x) \rightarrow^* (q, \varepsilon) \}$$

2. En utilisant X, montrer que l'on peut effectivement calculer les ensembles suivants :

$$Y := \{ (p, x, q, y) \in Q \times Z \times Q \times Z \mid \exists h, (p, x) \rightarrow^* (q, hy) \}$$
$$V := \{ (p, x) \in Q \times Z \mid (p, x) \rightarrow^{\omega} \}$$

Exercice 4

On considère des systèmes dont le fonctionnement peut être modélisé par une variante d'automate à pile qui n'a pas de canal d'entrée. Un tel système évolue donc seulement en fonction de l'état de contrôle et de la lettre en haut de la pile.

– Un *système à pile* S est un quadruplet $S = (Q, \Gamma, \delta, q_0)$ où Q, Γ, δ et q_0 sont respectivement l'ensemble des états de contrôle, l'alphabet de pile, la relation de transition $\delta \subseteq (Q \times (\Gamma \cup \{\varepsilon\})) \times (Q \times \Gamma^*)$ et l'état initial.

– Un *état* de S est un couple (q, α) où $q \in Q$ est un état de contrôle et $\alpha \in \Gamma^*$ un mot de pile. L'état initial de S est (q_0, ε). Un état (q', α') est *directement accessible* à partir d'un état (q, α), ce que l'on note $(q, \alpha) \Rightarrow (q', \alpha')$, s'il existe β, a et u tels que $\alpha = \beta a$, $\alpha' = \beta u$ et $((q, a), (q', u)) \in \delta$. La clôture réflexive et transitive de $\Rightarrow$ est notée $\Rightarrow^*$.
– On notera une transition $((q, \varepsilon), (q', a))$ par (q, a_+, q') ; de même une transition $((q, a), (q', \varepsilon))$ sera notée (q, a_-, q').
– Le *langage de la pile de* S *dans l'état* q, noté $L(S, q)$, est défini par

$$L(S, q) := \{ \alpha \mid \alpha \in \Gamma^*, (q_0, \varepsilon) \Rightarrow^* (q, \alpha) \}$$

Le *langage de la pile de* S, noté $L(S)$, est la réunion des $L(S, q)$ pour $q \in Q$.

1. Expliquer comment on peut simuler un système à pile S quelconque par un autre ayant une relation de transition dans $\big((Q \times \Gamma) \times (Q \times \{\varepsilon\})\big) \cup \big((Q \times \{\varepsilon\}) \times (Q \times \Gamma)\big)$.

On considère dans toute la suite de l'exercice que δ satisfait cette contrainte et peut donc être représentée par un ensemble fini de triplets (q, x, q') où chaque x est de la forme a_+ ou a_-. On associe alors à un système à pile $S = (Q, \Gamma, \delta, q_0)$ l'automate fini $S' = (Q, \Gamma, \delta', q_0, Q)$, où tout les états sont acceptants et où la relation de transition $\delta' \subseteq Q \times (\Gamma \cup \{\varepsilon\}) \times Q$ est la plus petite relation satisfaisant les conditions suivantes :
– si $(q, a_+, q') \in \delta$ alors $(q, a, q') \in \delta'$,
– si $(q, a_-, q') \in \delta$ et $(q'', a, q) \in \delta'^+$ alors $(q'', \varepsilon, q') \in \delta'$,
où δ'^+ représente la clôture transitive de δ'.

2. Soit le système à pile $S_1 = (\{1, 2, 3\}, \{a, b\}, \delta_1, 1)$ où δ_1 est l'ensemble

$$\{(1, a_+, 2), (2, b_+, 3), (3, b_-, 1), (1, b_+, 3)$$

Dessiner S_1 et l'automate associé S'_1.

3. Montrer que (q, α) est accessible à partir de (q_0, ε) dans S si et seulement si q est accessible dans S' par le mot α.

4. Montrer que pour tout $q \in Q$, le langage $L(S, q)$ est rationnel ; en conclure que le langage de la pile, $L(S)$, est aussi rationnel.

5. Expliquer comment calculer δ' et prouver la terminaison de votre algorithme.