Langages formels

Devoir 2

pour le 9 mai 2007

Soit un langage rationnel $L \subseteq \Sigma^*$, soit $\operatorname{perm} L$ l'ensemble des permutations de mots de L.

1. Montrer que si Σ est réduit à une lettre, alors $\operatorname{perm} L$ est rationnel.

2. Donner un langage régulier $L \subseteq \{a, b, c\}^*$ tel que $\operatorname{perm} L$ ne soit pas algébrique.

Le but de ce problème est de montrer que, dans le cas où Σ a deux éléments, $\operatorname{perm} L$ est un langage algébrique.

On note $\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs et $S = \{+, 0, -\}$ l'ensemble des signes. On note $s(n)$ le signe d'un entier n, donc $s(0) = 0$ et pour $n > 0$, $s(n) = +$ et $s(-n) = -$.

Définition 1 *Un automate à compteur est un quintuplet $\mathcal{A} = (\Sigma, Q, \delta, q_0, F)$ où Σ est l'alphabet d'entrée, Q est l'ensemble fini des états, $q_0 \in Q$ est l'état initial, $F \subseteq Q$ est l'ensemble des états finaux et $\delta \subseteq Q \times S \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times Q \times \mathbb{Z}$ est la table de transition. Une configuration est un couple $(q, n) \in Q \times \mathbb{Z}$. La relation d'exécution sur est engendrée par*

$$(q, n) \xrightarrow{a} (q', n + p) \qquad \textit{pour } a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\} \textit{ et } (q, s(n), a, q', p) \in \delta,$$

par clôture réflexive et transitive. Un mot w est accepté par $\mathcal{A}$ s'il existe une exécution $(q_0, 0) \xrightarrow{w} (q, n)$ avec $q \in F$ et $n \in \mathbb{Z}$ quelconque.

3. Montrer que tout langage reconnu par un automate à compteur est algébrique.

4. Donner un automate à compteur pour chacun des langages suivants :

- **a.** $L_1 := \{\, a^n b^{2n} \mid n \in \mathbb{N} \,\}$
- **b.** $L_2 := \{\, a^i b^{i+j} c^j \mid i, j \in \mathbb{N} \,\}$
- **c.** $L_3 := \{ w \mid w \in \{a, b, c\}^*, |w|_a + |w|_b = |w|_c \}$
- **d.** $L_4 := \{ w \mid w \in \{a, b\}^*, |w|_b \leqslant |w|_a \leqslant 2|w|_b \}$ (utiliser le non-déterminisme)

Définition 2 *La* fonction de Parikh π *est le morphisme de monoïdes de* $(\Sigma^*, \cdot, \varepsilon)$ *dans* $(\mathbb{N}^\Sigma, 0, +)$ *défini par* $\pi(a)(a) = 1$ *et* $\pi(a)(b) = 0$ *pour* $a \neq b$*, c'est-à-dire que* $\pi(w)$ *compte les occurences de chaque lettre dans* w*.*

5. Remarquer qu'on a $\operatorname{perm} L = \pi^{-1}(\pi(L))$.

6. Soit f une fonction affine de $\mathbb{N}^\Sigma$ dans $\mathbb{Z}$. Montrer que les langages $\{ w \mid f(\pi(w)) = 0 \}$ et $\{ w \mid f(\pi(w)) > 0 \}$ sont algébriques. Montrer que ces langages sont rationnels dans le cas où f est croissante.

7. Soit f une fonction affine de $\mathbb{N}^\Sigma$ dans $\mathbb{Z}$. Soit c un entier naturel non nul. Montrer que le langage $\{ w \mid f(\pi(w)) \equiv 0 \pmod c \}$ est rationnel.

On se place maintenant dans le cas où Σ a deux éléments, et on s'intéresse donc à des sous-ensembles de $\mathbb{N}^2$.

Définition 3 *Une partie de* $\mathbb{N}^2$ *est dite* semi-linéaire *si elle est*
- *un singleton,*
- *une demie droite* $\{ A + tB \mid t \in \mathbb{N} \}$ *avec* $B \neq (0, 0)$,
- *un quart de plan* $\{ A + tB + uC \mid t, u \in \mathbb{N} \}$ *avec* B *et* C *linéairement indépendants.*

Une partie de $\mathbb{N}^2$ *est dite* régulière *si elle est une union finie de partie semi-linéaires.*

8. Montrer que la somme de deux parties semi-linéaires est toujours une partie régulière (pas nécessairement semi-linéaire).

9. En déduire que, pour tout langage régulier L, $\pi(L)$ est une partie régulière.

On cherche maintenant à montrer que l'image réciproque par π d'une partie régulière est algébrique.

10. Montrer que, si V est une demie-droite, $\pi^{-1}(V)$ est algébrique.

11. On considère une partie $V = \{ A + tB + uC \mid t, u \in \mathbb{N} \}$ avec $A, B, C \in \mathbb{N}^2$, B et C linéairement indépendants.

a. Montrer que V peut s'exprimer comme l'ensemble des (x, y) vérifiant un système de contraintes de la forme

$$\begin{aligned} \alpha x + \beta y + \gamma &\geqslant 0 & \qquad \alpha x + \beta y + \gamma &\equiv 0 \pmod c \\ \alpha' x + \beta' y + \gamma' &\geqslant 0 & \qquad \alpha' x + \beta' y + \gamma' &\equiv 0 \pmod{c'} \end{aligned}$$

avec $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma' \in \mathbb{Z}$ et $c, c' \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

b. En raisonnant par cas selon les signes de α et α', montrer que $\pi^{-1}(V)$ est algébrique. On pourra s'inspirer du cas du langage L_4 défini plus haut dans le cas où les signes sont opposés.

12. Déduire que, pour tout L régulier, $\operatorname{perm} L$ est algébrique.