Langages Formels

Licence Informatique – ENS Cachan

Partiel du 27 mars 2014

durée 2 heures

Document autorisé : polycopié du cours.
Toutes les réponses devront être correctement justifiées.
Le chiffre en regard d'une question est une indication sur sa difficulté ou sa longueur.

1 Mots

Soit Σ un alphabet et $L \subseteq \Sigma^*$ un langage. On définit le *tiers médian* de L par

$$\mathtt{TM}(L) = \{v \in \Sigma^* \mid \exists u, w \in \Sigma^* \text{ tels que } uvw \in L \text{ et } |u| = |v| = |w|\} .$$

[3] **a)** On suppose que L est reconnu par un automate (non déterministe) $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, T, I, F)$. Montrer que $\mathtt{TM}(L)$ peut être reconnu par un automate (non déterministe) $\mathcal{A}' = (Q', \Sigma, T', I', F')$ tel que $|Q'| \le |Q|^3$. Il faut bien sûr définir l'automate $\mathcal{A}'$ et prouver qu'il reconnaît bien $\mathtt{TM}(L)$.

[3] **b)** On suppose maintenant que L est reconnu par un morphisme $h \colon \Sigma^* \to M$ où M est un monoïde fini. Montrer que $\mathtt{TM}(L)$ peut être reconnu par un morphisme $h' \colon \Sigma^* \to M'$ où M' est un monoïde tel que $|M'| = 2^{\mathcal{O}(|M|)}$. Il faut bien sûr définir le monoïde, le morphisme et prouver qu'il reconnaît bien $\mathtt{TM}(L)$.

On considère maintenant l'opération inverse :

$$\mathtt{TM}^{-1}(L) = \{uvw \in \Sigma^* \mid v \in L \text{ et } |u| = |v| = |w|\} .$$

est l'ensemble des mots dont le tiers médian est dans L.

[2] **c)** On suppose que $L \subseteq \Sigma^*$ est un langage reconnaissable.
Le langage $\mathtt{TM}^{-1}(L)$ est-il nécessairement reconnaissable ?
Le langage $\mathtt{TM}^{-1}(L)$ est-il nécessairement algébrique ?
Mêmes questions en supposant que $|\Sigma| = 1$.

[3] **d)** Soient $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathrm{MSO}(\Sigma, <)$ deux formules closes qui définissent des langages $L_i = \mathcal{L}(\varphi_i) \in \Sigma^+$ ($i = 1, 2$). Construire à partir de φ_1 et φ_2 une formule φ qui définit la concaténation $L_1 \cdot L_2$.

[3] **e)** Les langages $L_1 = \{a^n b^n a^n \mid n \ge 0\}$ et $L_2 = \{a^p b^n a^q \mid n = p+q \ge 0\}$ sont-ils reconnaissables ? Sont-ils algébriques ?

[4] **f)** Donner une grammaire algébrique qui engendre le langage $L_3 = \{w \in \{a,b\}^* \mid |w|_a = 2|w|_b\}$. Prouver que votre grammaire engendre bien le langage L_3.

2 Arbres

On considère l'ensemble $T(\mathcal{F})$ des termes construits avec un symbole binaire $\mathcal{F}_2 = \{c\}$ et deux constantes $\mathcal{F}_0 = \{a, b\}$.

On note $L = \{w \in \{a, b\}^+ \mid |w|_a = |w|_b\}$.

[2] **a)** L'ensemble $\{t \in T(\mathcal{F}) \mid \mathrm{Fr}(t) \in L\}$ des termes dont la frontière est dans le langage L est-il reconnaissable ?

[4] **b)** Construire un automate d'arbres $\mathcal{A}$ tel que $\mathcal{L}(\mathcal{A}) \subseteq T(\mathcal{F})$ et $\mathrm{Fr}(\mathcal{L}(\mathcal{A})) = L$.