Langages Formels

Licence Informatique – ENS Cachan

Partiel du 25 mars 2009

durée 3 heures

Document autorisé : polycopié du cours.

Toutes les réponses devront être correctement justifiées.

Le chiffre en regard d'une question est une indication sur sa difficulté ou sa longueur.

1 Rationnels, algébriques et automates à pile

Le but de l'exercice est de prouver que les langages des mots de pile d'un automate à pile sont reconnaissables.

On considère un alphabet $A = \{a_1,\bar{a}_1,\dots,a_n,\bar{a}_n\}$ et le langage de Dyck $D_n^* \subseteq A^*$ engendré par la grammaire

$$S \to \varepsilon + \sum_{i=1}^{n} a_i S \bar{a}_i S$$

[1] **a)** Montrer que $D_n^* \cdot D_n^* = D_n^*$.

On définit la relation de *réduction*

$$\Longrightarrow\; = \{(ua_i\bar{a}_iv\,,uv) \mid u,v \in A^* \text{ et } 1 \leq i \leq n\}$$

et on note $\stackrel{*}{\Longrightarrow}$ la clôture réflexive et transitive de $\Longrightarrow$.

[3] **b)** Montrer que $D_n^* = \{w \in A^* \mid w \stackrel{*}{\Longrightarrow} \varepsilon\}$.

On considère un automate fini $\mathcal{A} = (Q,A,T,I,F)$ avec $T \subseteq Q \times A \times Q$. Pour $p,q \in Q$ on définit $\mathcal{L}_{p,q}(\mathcal{A})$ comme l'ensemble des mots $w \in A^*$ acceptés par $\mathcal{A}$ si on prend p comme unique état initial et q comme unique état final. Enfin, on définit

$$X = \{(p,q) \in Q^2 \mid \mathcal{L}_{p,q}(\mathcal{A}) \cap D_n^* \neq \emptyset\}$$

[1] **c)** Montrer que la relation X est réflexive, transitive et qu'elle est calculable, i.e., étant donné $(p,q) \in Q^2$, on peut décider si $(p,q) \in X$

On définit par récurrence des relations $X_k \subseteq Q^2$ par

$$\begin{aligned} X_0 &= \{(p,p) \mid p \in Q\} \\ X_{k+1} &= X_k \cup \{(p,q) \mid \exists\, p',q',r' \in Q,\ \exists\, 1 \leq i \leq n \text{ avec} \\ &\qquad\qquad (p,a_i,p') \in T,\ (p',q') \in X_k,\ (q',\bar{a}_i,r') \in T \text{ et } (r',q) \in X_k\} \end{aligned}$$

[2] **d)** Montrer que $X = \bigcup_{k \geq 0} X_k$.

On définit l'automate $\mathcal{A}' = (Q,A,T',I,F)$ en ajoutant des ε-transitions à l'automate $\mathcal{A}$:

$$T' = T \cup \{(p,\varepsilon,q) \mid (p,q) \in X\}$$

[1] **e)** Montrer que $\mathcal{L}(\mathcal{A}')$ est fermé par réduction, i.e., si le mot $ua_i\bar{a}_iv$ est accepté par $\mathcal{A}'$ alors il en est de même du mot uv.

[2] **f)** Montrer que $\mathcal{L}(\mathcal{A}') = \{v \in A^* \mid \exists\, w \in \mathcal{L}(\mathcal{A}) \text{ avec } w \stackrel{*}{\Longrightarrow} v\}$.

[1] **g)** Soient $u,v,v' \in A^*$ trois mots. Montrer que si $u \Longrightarrow v$ et $u \Longrightarrow v'$ alors $v = v'$ ou il existe $w \in A^*$ tel que $v \Longrightarrow w$ et $v' \Longrightarrow w$.

[3] **h)** En déduire que la relation de réduction est confluente, i.e., pour tous $u,v,v' \in A^*$, si $u \stackrel{*}{\Longrightarrow} v$ et $u \stackrel{*}{\Longrightarrow} v'$ alors il existe $w \in A^*$ tel que $v \stackrel{*}{\Longrightarrow} w$ et $v' \stackrel{*}{\Longrightarrow} w$.

Un mot $v \in A^*$ est irréductible s'il n'existe pas de mot $w \in A^*$ tel que $v \Longrightarrow w$.

[1] **i)** Montrer que pout tout $v \in A^*$ il existe un unique $w \in A^*$ irréductible tel que $v \stackrel{*}{\Longrightarrow} w$.

On note $\rho : A^* \to A^*$ l'application qui associe à un mot $v \in A^*$ l'unique mot irréductible $\rho(v) \in A^*$ tel que $v \stackrel{*}{\Longrightarrow} \rho(v)$.

[2] **j)** Montrer que si $L \subseteq A^*$ est un langage rationnel, alors $\rho(L)$ est aussi rationnel.

Dans la suite, $\mathcal{A} = (Q,\Sigma,Z,T)$ sera un automate à pile avec l'ensemble fini de transitions $T \subseteq Q \times Z \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times Q \times Z^*$. On considère T comme un alphabet et on introduit pour $q \in Q$ les sous-alphabets

$$G_q = T \cap (\{q\} \times Z \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times Q \times Z^*)$$
$$D_q = T \cap (Q \times Z \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \{q\} \times Z^*)$$

Pour $p,q \in Q$, on définit le langage $L_{p,q} \subseteq T^*$ par $\varepsilon \in L_{p,q}$ si $p = q$ et

$$L_{p,q} \cap T^+ = (G_p \cdot T^* \cap T^* \cdot D_q) \setminus \bigcup_{r \neq s} T^* \cdot D_r \cdot G_s \cdot T^*$$

On suppose que l'alphabet de pile est $Z = \{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$ et on définit le morphisme $h : T^* \to A^*$ par $h((p,z,x,q,u)) = \bar{z}u$ (on rappelle que $A = \{a_1,\bar{a}_1,\ldots,a_n,\bar{a}_n\}$).

Finalement, pour $(p,z,q) \in Q \times Z \times Q$, on définit

$$K_{p,z,q} = \rho(z \cdot h(L_{p,q})) \cap Z^*$$

[1] **k)** Montrer que $K_{p,z,q}$ est un langage rationnel.

[2] **l)** Soit $\tau \in L_{p,q}$ tel que $u = \rho(zh(\tau)) \in Z^*$. Montrer qu'il existe un calcul $(p,z) \stackrel{*}{\rightarrow} (q,u)$ dans l'automate à pile $\mathcal{A}$.

[3] **m)** Montrer que $K_{p,z,q} = \{u \in Z^* \mid \exists\, (p,z) \stackrel{*}{\rightarrow} (q,u) \text{ dans } \mathcal{A}\}$.