Problème de correspondance de Post : PCP

Données : 2 morphismes $f, g : A^* \to B^*$

Question : $\exists w \in A^+$ tq $f(w) = g(w)$?

Ce problème est indécidable.

<u>Lemme 1</u>: Le langage L_f est linéaire (et déterministe) :

$L_f = \{ \tilde{u} \# f(u) \mid u \in A^+ \}$ où $\tilde{u}$ miroir de u

<u>Preuve</u>: L_f est engendré par la grammaire linéaire

G_f : $F \to aFf(a)$ $\forall a \in A$ et $F \to \#$

exemple de dérivation

$S \to a_n F f(a_n) \to a_n a_{n-1} F f(a_{n-1}) f(a_n)$

$--- \to a_n -- a_1 F f(a_1) -- f(a_n)$

$\to a_n -- a_1 \# f(a_1 --- a_n)$ (f morphisme)

<u>Corollaire 1</u> Le vide de l'intersection de langages linéaires est indécidable.

<u>Preuve</u>: PCP a une solution ssi $L_f \cap L_g \neq \emptyset$

<u>Corollaire 2</u> l'ambiguïté d'une grammaire est indécidable

<u>Preuve</u>: G_f et G_g sont non ambigües

Donc $G_f \cup G_g$ est ambigüe ssi $L_f \cap L_g \neq \emptyset$

Pour $G_f \cup G_g$ on ajoute l'axiome S et les règles

$S \to F$ $S \to G$

Lemme 2 : Le langage L_{7f} est linéaire (et déterministe) :

$$L_{7f} = \{ \tilde{u} \# v \mid u \in A^*, v \in B^*, v \neq f(u) \}$$

Preuve On construit la grammaire linéaire G_{7f}

$S \to a S f(a) \quad \forall a \in A$

$S \to a S_1 w$ si $a \in A$, $|w| \leq |f(a)|$ mais w n'est pas un suffixe de $f(a)$

$S \to a S_2 w$ si $a \in A$ et $|w| < |f(a)|$

$S \to S_3$

avec des grammaires linéaires (droite) pour les langages rationnels

$$\mathcal{L}(S_1) = A^* \# B^*$$
$$\mathcal{L}(S_2) = A^* \#$$
$$\mathcal{L}(S_3) = \# B^+$$

Remarque : On utilise les règles

- $S \to a S_2 w$ pour engendrer un mot $\tilde{u} \# v$ avec v trop court : $f(u) \in B^+ v$
- $S \to S_3$ pour engendrer un mot $\tilde{u} \# v$ avec v trop long : $v \in B^+ f(u)$
- $S \to a S_1 w$ pour engendrer un mot $\tilde{u} \# v$ avec $v = v_2 b v_1 \quad f(u) = v_3 b' v_1 \quad b \neq b'$

Corollaire: L'universalité d'un langage linéaire est indécidable

Preuve: le langage $L = L_{\neg f} \cup L_{\neg g} \cup \overline{A^+ \# B^*}$ est linéaire.

Claim $L = \Sigma^*$ ssi PCP n'a pas de solution

1) Si PCP a une solution $u \in A^+$ tq $v = f(u) = g(u)$
alors $\tilde{u} \# v \in A^+ \# B^* \setminus (L_{\neg f} \cup L_{\neg g})$
donc $\tilde{u} \# v \notin L$ et $L \neq \Sigma^*$

2) Si $L \neq \Sigma^*$ $\exists w \in A^+ \# B^* \setminus (L_{\neg f} \cup L_{\neg g})$
alors $w = \tilde{u} \# v$ avec $u \in A^+$, $v = f(u) = g(u)$