$G_1 : \begin{cases} x_1 \longrightarrow x_1 b + a \\ x_2 \longrightarrow x_1 b + a x_2 x_1 \end{cases}$

Méthode "à la main".

$\mathcal{L}(x_1) = ab^* = a + ab^+$

On peut engendrer b^+ avec $x'_1 \to b + b x'_1$

Donc dans G'_1 on met

$x_1 \longrightarrow a + a x'_1$

$x'_1 \longrightarrow b + b x'_1$

On a $\mathcal{L}_{G_1}(x_1) = \mathcal{L}_{G'_1}(x_1)$

Reste à traiter $x_2 \longrightarrow x_1 b$

Il suffit de remplacer x_1 par $a + a x'_1$

On obtient dans G'_1 $x_2 \longrightarrow ab + a x'_1 b + a x_2 x_1$

On illustre la preuve sur

$$G_2 \left| \begin{array}{l} x_1 \to x_1x_1 + x_1x_2 + x_2 a + b \\ x_2 \to x_1x_2 + x_2x_1 + a \end{array} \right.$$

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 & x_2 \\ a & x_1 \end{pmatrix} \quad B = (\beta_1, \beta_2) = (b, a)$$
$$X = (x_1, x_2)$$

On a bien $X \to XA + B$

$$Y = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix}$$

$X \to BY + B$ s'écrit
$$x_1 \to b y_{11} + a y_{21} + b$$
$$x_2 \to b y_{12} + a y_{22} + a$$

Ces règles sont déjà en FNG

$Y \to AY + A$ s'écrit
$$y_{11} \to (x_1 + x_2) y_{11} + x_2 y_{21} + x_1 + x_2$$
$$y_{12} \to (x_1 + x_2) y_{12} + x_2 y_{22} + x_2$$
$$y_{21} \to a y_{11} + x_1 y_{21} + a$$
$$y_{22} \to a y_{12} + x_1 y_{22} + x_1$$

Ces règles ne sont pas en FNG.
Mais les variables à gauche sont x_1 ou x_2
$\to$ substitution

$$y_{11} \to (b y_{11} + a y_{21} + b)(y_{11} + \varepsilon) + (b y_{12} + a y_{22} + a)(y_{11} + y_{21} + \varepsilon)$$
$$y_{12} \to (b y_{11} + a y_{21} + b) y_{12} + (b y_{12} + a y_{22} + a)(y_{12} + y_{22} + \varepsilon)$$
$$y_{21} \to a y_{11} + (b y_{11} + a y_{21} + b) y_{21} + a$$
$$y_{22} \to a y_{12} + (b y_{11} + a y_{21} + b)(y_{22} + \varepsilon)$$

la grammaire G_2'' est en FNG

Preuve de la Proposition

$\forall x \in V \quad \mathcal{L}_G(x) = \mathcal{L}_{G'}(x)$

Induction sur la longueur d'une dérivation <u>gauche</u> dans G pour $\subset$ et <u>droite</u> dans G' pour $\supset$

1) $\mathcal{L}_G(x) \subset \mathcal{L}_{G'}(x)$

Une dérivation gauche $x \xrightarrow{n}_g w$ dans G s'écrit

$x = x_{i_0} \to_g x_{i_1} u_1 \to_g x_{i_2} u_2 u_1 \; --- \to_g x_{i_k} u_k -- u_2 u_1 \to_g u_{k+1} u_k --- u_2 u_1$

avec $u_1 \in \alpha_{i_1 i_0} \quad u_2 \in \alpha_{i_2 i_1} \; --- \; u_k \in \alpha_{i_k i_{k-1}}$ et $u_{k+1} \in \beta_{i_k}$

puis $u_{k+1} u_k -- u_2 u_1 \xrightarrow{n-k-1}_g w$

Lemme fondamental : $w = w_{k+1} w_k -- w_2 w_1$

et $u_i \xrightarrow{n_i}_g w_i$ avec $n+k-1 = n_1 + -- + n_{k+1}$

HR : dans G' on a $u_i \xrightarrow{*}_d w_i \quad \forall \; 1 \leq i \leq k+1$

De plus, on a dans G' la dérivation droite suivante :

$x = x_{i_0} \to_d u_{k+1} y_{i_k i_0} \to_d u_{k+1} u_k y_{i_{k-1} i_0} \; --- \to_d u_{k+1} - u_2 y_{i_1 i_0} \to_d u_{k+1} - u_2 u_1$

$\xrightarrow{*}_d w_{k+1} w_k -- w_2 w_1 = w$

2) $\mathcal{L}_G(x) \supset \mathcal{L}_{G'}(x)$: similaire.