

Langages Formels

Licence Informatique – ENS Cachan

Examen du 24 mai 2012

durée 3 heures

Document autorisé : photocopié du cours.

Toutes les réponses devront être correctement justifiées.

Le chiffre en regard d'une question est une indication sur sa difficulté ou sa longueur.

1 Automates d'arbres

[1] **a)** Un arbre binaire est équilibré si pour chaque nœud, la différence de hauteur entre les sous-arbres gauche et droit est au plus 1. L'ensemble des arbres binaires équilibrés avec étiquettes dans l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$ est-il reconnaissable ?

[3] **b)** On considère l'ensemble $T_p(\Sigma)$ des Σ -arbres d'arité au plus p avec l'alphabet de directions $A_p = \{d_1, \dots, d_p\}$. Pour $a \in \Sigma$ et $L \subseteq T_p(\Sigma)$ on définit

$$L_a = \{u \in A_p^* \mid \exists t \in L \text{ tel que } u \in \text{dom}(t) \text{ et } t(u) = a\}.$$

Soit $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, F)$ un automate d'arbres reconnaissant $L \subseteq T_p(\Sigma)$. Le langage $L_a \subseteq A_p^*$ est-il reconnaissable ?

[4] **c)** On considère l'automate d'arbre $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, F)$ sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b, f, g\}$ et l'ensemble d'états $Q = \{q_0, q_1, \dots, q_5\}$, avec $F = \{q_4, q_5\}$ et ayant pour transitions

$$\begin{array}{lll} \xrightarrow{a} q_1 & q_1 \xrightarrow{g} q_3 & q_1, q_3 \xrightarrow{f} q_4 \\ \xrightarrow{b} q_2 & q_2 \xrightarrow{g} q_4 & q_2, q_4 \xrightarrow{f} q_5 \\ & & q_2, q_5 \xrightarrow{f} q_4 \end{array}$$

et toutes les transitions non spécifiées ci-dessus mènent vers l'état q_0 .

Montrer que \mathcal{A} accepte les arbres définis par l'expression $t_1^* t_2$ où $t_1 = f(b, \square)$ et $t_2 = g(b)$.

Caractériser le langage d'arbres $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ au moyen d'expressions similaires.

Minimiser l'automate \mathcal{A} .

2 Fonctions séquentielles

On considère les mots sur l'alphabet binaire $\Sigma = \{0,1\}$ qui codent des entiers en binaire en commençant par le bit de poids faible : le mot $u = a_0a_1 \cdots a_n$ code l'entier $\bar{u}^2 = \sum_{i=0}^n a_i 2^i$.

[1] **a)** On considère l'ensemble $L_1 \subseteq \Sigma^*$ des mots qui codent des entiers congrus à 1 modulo 3. L'ensemble L_1 est-il reconnaissable? Si oui, construire son automate minimal.

[1] **b)** On considère la fonction $f: \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ qui associe à un mot $u \in \Sigma^*$ le mot $v \in \Sigma^*$ tel que

$$\begin{cases} |v| = |u| \text{ et } \bar{v}^2 = \bar{u}^2 \text{ div } 2 & \text{si } \bar{u}^2 \text{ mod } 2 = 0 \\ |v| = |u| + 1 \text{ et } \bar{v}^2 = 2\bar{u}^2 & \text{si } \bar{u}^2 \text{ mod } 2 = 1 \end{cases}$$

La fonction f est-elle séquentielle? Si oui, construire son automate séquentiel minimal.

[3] **c)** On considère la fonction $g: \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ qui associe à un mot $u \in \Sigma^*$ le mot $v \in \Sigma^*$ tel que $|v| = |u|$ et $\bar{v}^2 = \bar{u}^2 \text{ div } 3$.

La fonction g est-elle séquentielle? Si oui, construire son automate séquentiel minimal.

[3] **d)** On considère la fonction $h: \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ qui associe à un mot $u \in \Sigma^*$ tel que $\bar{u}^2 \text{ mod } 3 = 0$ le mot $v \in \Sigma^*$ tel que $|v| = |u|$ et $\bar{v}^2 = \bar{u}^2 \text{ div } 3$. La fonction h n'est pas définie sur les mots $u \in \Sigma^*$ tels que $\bar{u}^2 \text{ mod } 3 \neq 0$.

La fonction h est-elle séquentielle? Si oui, construire son automate séquentiel minimal.

3 Grammaires, automates à pile et analyse syntaxique

[2] **a)** Construire un automate à pile pour le langage

$$L = \{w \in a^*b^*c^* \mid w \text{ n'est pas de la forme } a^n b^n c^n \text{ avec } n \geq 0\}.$$

[4] **b)** Étant donnés deux langages $K, L \subseteq \Sigma^*$ on définit

$$C(K, L) = \{u \in \Sigma^* \mid \forall v \in L, uv \in K\}.$$

En supposant K rationnel et L algébrique, le langage $C(K, L)$ est-il rationnel? algébrique?

En supposant K algébrique et L rationnel, le langage $C(K, L)$ est-il rationnel? algébrique?

[4] **c)** On considère la grammaire augmentée G définie par les règles :

$$\begin{array}{lll} 0 : S' \rightarrow S & 1 : S \rightarrow S_S & 3 : S \rightarrow \{S\} \\ & 2 : S \rightarrow S \hat{S} & 4 : S \rightarrow a \end{array}$$

Calculer $\text{Follow}_1(S')$ et $\text{Follow}_1(S)$.

Calculer l'automate \mathcal{C}_0 des contextes SLR de G .

Donner la table (action et goto) de l'analyseur SLR de G .

La grammaire G est-elle SLR? ambiguë?