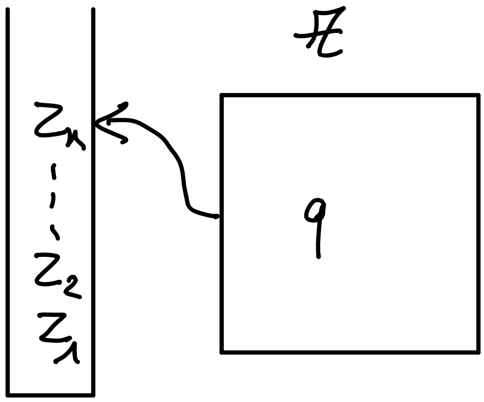


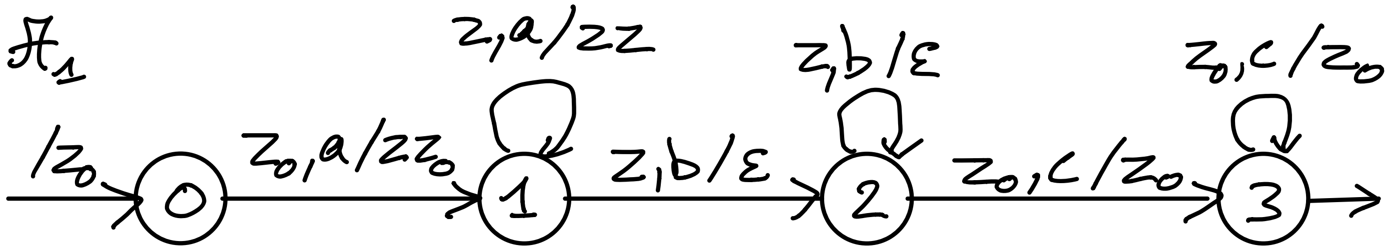
Configuration $q z_n \cdots z_2 z_1$:
automate $\mathcal{A}$ dans l'état q
sommet de pile (tête de lecture)
sur z_n

Une transition $(pz, a, qg) \in T$ se représente graphiquement par $\;(p) \xrightarrow{z,a/g} (q)$

configuration <u>initiale</u> par $\xrightarrow{/z_0} (q_0)$

<u>Ex:</u> $L_1 = \{ a^n b^n c^p \mid n, p > 0 \}$

$\mathcal{A}_1$



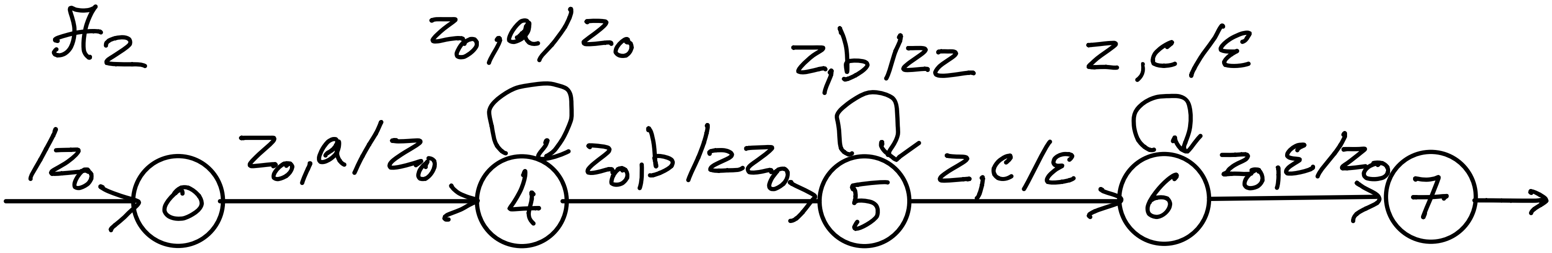
exemple de calcul acceptant pour $a^3 b^3 c^2$

$$0z_0 \xrightarrow{a} 1zz_0 \xrightarrow{a} 1zzz_0 \xrightarrow{a} 1z^3z_0 \xrightarrow{b} 2z^2z_0 \xrightarrow{b} 2zz_0$$
$$\xrightarrow{b} 2z_0 \xrightarrow{c} 3z_0 \xrightarrow{c} 3z_0$$

<u>Rem</u> $\mathcal{A}_1$ est déterministe (D)
$\mathcal{A}_1$ est temps réel (TR)
$\mathcal{A}_1$ est "à fond de pile testable", i.e.,
la pile ne contient plus qu'un symbole
ssi le sommet de pile est z_0

Ex: $L_2 = \{ a^n b^p c^p \mid n, p > 0 \}$

$\mathcal{A}_2$



exemple de calcul acceptant pour $a b^2 c^2$

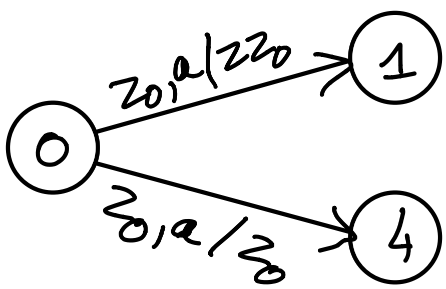
$0 z_0 \xrightarrow{a} 4 z_0 \xrightarrow{b} 5 z z_0 \xrightarrow{b} 5 z^2 z_0 \xrightarrow{c} 6 z z_0 \xrightarrow{c} 6 z_0 \xrightarrow{\varepsilon} 7 z_0$

L'automate $\mathcal{A}_2$ est D mais pas TR.

Ex: $L_3 = L_1 \cup L_2$

Il suffit de faire $\mathcal{A}_3 = \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ en fusionnant l'état initial 0.

Mais $\mathcal{A}_3$ est non déterministe (ND) à cause de



Rem: pas d'automate D pour L_3 : $D \subsetneq ND$

Exercice: Construire un automate à pile déterministe pour

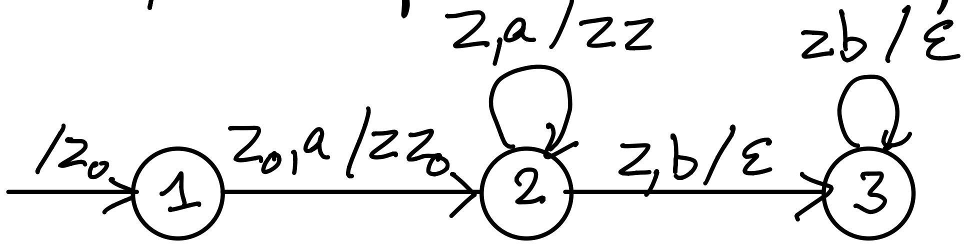
$L_4 = \{ a^n b^p c^n \mid n, p > 0 \} \cup \{ a^n b^p d^p \mid n, p > 0 \}$

Rem: Pas d'automate D+TR pour L_4

$D+TR \subsetneq D$

Exemple : $L_5 = \{ a^n b^n \mid n \geq 0 \}$

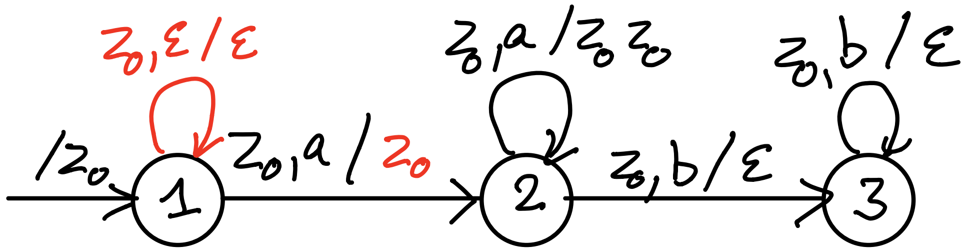
- acceptation par sommet de pile



$Z' = \{ Z_0 \}$

déterministe

- Acceptation par pile vide



non déterministe

non ambigu

Preuve Automate à Pile vers Grammaire

On construit $G = (\Sigma, V, P)$ avec

$V = \{ X_{p,z,q} \mid p,q \in Q \text{ et } z \in Z \}$

de telle sorte que l'on ait

Lemme: $\mathcal{L}_G(X_{p,z,q}) = \{ w \in \Sigma^* \mid pz \xrightarrow[*]{w} q \text{ dans } \mathcal{A} \}$

Pour cela on définit les règles de G par

$$P = \{ X_{p,z,q} \longrightarrow a X_{p_1,y_1,p_2} \cdots X_{p_n,y_n,q} \mid pz \xrightarrow{a} p_1 y_1 \cdots y_n \in T \ (\text{donc } a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\},\ y_i \in Z,\ n \geq 0),\ p_1, p_2, \ldots, p_n \in Q \}$$

Rem: si $n = 0$ la règle est $X_{p,z,q} \rightarrow a$

Preuve du lemme:

$\boxed{\subset}$ Récurrence sur longueur d'une dérivation.

$$X_{p,z,q} \xrightarrow{m} w \in \Sigma^*$$

- Si $m = 1$ alors $w = a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$ et $pz \xrightarrow{a} q \in T$: OK
- Si $m > 1$ alors la dérivation s'écrit :

$$X_{p,z,q} \longrightarrow a X_{p_1 y_1 p_2} \cdots X_{p_n y_n q} \xrightarrow{m-1} w$$

avec $pz \xrightarrow{a} p_1 y_1 \cdots y_n \in T$

lemme fondamental : $X_{p_i y_i p_{i+1}} \xrightarrow{m_i} w_i$ dans G avec

$w = w_1 \cdots w_n$ et $m-1 = m_1 + \cdots + m_n$ $(p_{n+1} = q)$

HR : $p_i y_i \xrightarrow[*]{w_i} p_{i+1}$ dans $\mathcal{A}$

On recolle en utilisant le LF pour $\mathcal{A}$

$$pz \xrightarrow{a} p_1 y_1 \cdots y_n \xrightarrow[*]{w_1} p_2 y_2 \cdots y_n \xrightarrow[*]{w_2} p_3 y_3 \cdots y_n$$

$$\cdots\ p_n y_n \xrightarrow{w_n} p_{n+1} = q$$

$\boxed{\supset}$ Récurrence sur longueur du calcul

$px \xrightarrow[m]{w} q$ dans $\mathcal{A}$

- $m = 1$ $\quad w = a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$ et $px \xrightarrow{a} q \in T$

  donc $px \to aq \in P$: OK

- $m > 1$ le calcul s'écrit

$$px \xrightarrow{a} p_1 y_1 \cdots y_n \xrightarrow[m-1]{v} q \qquad \text{avec } n \geq 1 \text{ et } w = av$$

Donc $X_{pxq} \to a X_{p_1 y_1 p_2} \cdots X_{p_n y_n p_{n+1}} \in P$ et

LF des automates à Pile appliqué $n-1$ fois

$\exists\, p_2, \ldots, p_n$ et des calculs $p_i y_i \xrightarrow[m_i]{v_i} p_{i+1}$ de $\mathcal{A}$

avec $m - 1 = m_1 + \cdots + m_n$ et $v = v_1 \cdots v_n$ $\quad (p_{n+1} = q)$

HR on a dans G les dérivations

$$X_{p_i y_i p_{i+1}} \xrightarrow{*} v_i$$

On recolle pour obtenir dans G

$$\begin{aligned} X_{pxq} &\to a X_{p_1 y_1 p_2} \cdots X_{p_n y_n p_{n+1}} \\ &\xrightarrow{*} a v_1 X_{p_2 y_2 p_3} \cdots X_{p_n y_n p_{n+1}} \\ &\ \vdots \\ &\xrightarrow{*} a v_1 \cdots v_{n-1} X_{p_n y_n p_{n+1}} \xrightarrow{*} a v_1 \cdots v_n = w \quad \square \end{aligned}$$

Preuve Grammaire vers Automate à Pile

Définition : Automate LL ou expansion/vérification

Soit $G = (\Sigma, V, P, S)$ une grammaire réduite.
On construit l'automate à pile simple non déterministe qui accepte par pile vide :
$\mathcal{A} = (\Sigma, \Sigma \cup V, T, S)$ où les transitions de T sont des

- expansions : $\{(x, \varepsilon, \alpha) \mid (x, \alpha) \in P\}$ ou
- vérifications : $\{(a, a, \varepsilon) \mid a \in \Sigma\}$.

Remarque : sommet de pile à gauche.

Lemme $\forall \alpha \in (\Sigma \cup V)^* \quad \forall w \in \Sigma^*$

$\alpha \xrightarrow[g]{*} w$ dans G ssi $\alpha \xrightarrow[*]{w} \varepsilon$ dans $\mathcal{A}$

$\boxed{\Rightarrow}$ Rec. sur n dans $\alpha \xrightarrow[g]{n} w$ dérivation

- $n = 0 \quad \alpha = w \in \Sigma^*$

Vérifications : $\alpha \xrightarrow[*]{w} \varepsilon$ dans $\mathcal{A}$

- $n > 0 \quad \alpha = u x \delta$ avec $u \in \Sigma^*, x \in V, \delta \in (\Sigma \cup V)^*$

On applique la règle $x \to \gamma \in P$: $\alpha \xrightarrow[g]{1} u\gamma\delta \xrightarrow[g]{n-1} w$

LF $w = uv$ et $\gamma\delta \xrightarrow[g]{n-1} v$

HR $\gamma\delta \xrightarrow[*]{v} \varepsilon$ dans $\mathcal{A}$

donc $\alpha \underset{\text{vérifications}}{\xrightarrow[*]{u}} \gamma\delta \xrightarrow[*]{v} \varepsilon$ dans $\mathcal{A}$

$\boxed{\Leftarrow}$ Rec sur n dans $\alpha \xrightarrow[n]{w} \varepsilon$ calcul de $\mathcal{A}$

$n = 0$: $w = \varepsilon = \alpha$ donc $\alpha \xrightarrow[g]{0} w$

$n > 0$: 1) si $\alpha = a\delta$ avec $a \in \Sigma$ alors le calcul est $\alpha \xrightarrow[1]{a} \delta \xrightarrow[n-1]{v} \varepsilon$ avec $w = av$

HR $\delta \xrightarrow[g]{*} v$ donc $\alpha = a\delta \xrightarrow[g]{*} av = w$

2) $\alpha = x\delta$ avec $x \in V$ alors le calcul est

$\alpha \xrightarrow{\varepsilon} \gamma\delta \xrightarrow[n-1]{w} \varepsilon$

HR $\gamma\delta \xrightarrow[g]{*} w$ Donc $\alpha = x\delta \xrightarrow[g]{1} \gamma\delta \xrightarrow[g]{*} w$ $\square$

<u>Remarque</u> : Si G est en FNPG, on remplace les expansions par $\{(x, a, \alpha) \mid x \to a\alpha \in P\}$

L'automate obtenu est TR.