Algorithmique

Examen du 13 novembre 2008
durée 3 heures

Le polycopié du cours est le seul document autorisé.

Les exercices sont indépendants.

Toutes les réponses devront être correctement justifiées. La rigueur des raisonnements, la clarté des explications, et la qualité de la présentation influeront sensiblement sur la note.

1 Terminaison

On considère la fonction de McCarthy :

```
fonction f(n:int) : int
Début
   si n > 100 alors retourner n-10 fsi
   retourner f(f(n+11))
Fin
```

a) Montrer que la fonction termine pour toute donnée entière et exprimer *directement* la valeur $f(n)$ en fonction de n.

On note $g(n)$ le nombre d'additions et de soustractions utilisées lors du calcul de $f(n)$ par le programme ci-dessus.

b) Calculer $g(98)$, $g(91)$ et $g(76)$.

c) Exprimer *directement* $g(n)$ en fonction de n.

2 Complexité

On souhaite déterminer la résistance à la chute de bocaux. Plus précisément, on souhaite déterminer la hauteur maximale de laquelle on peut faire tomber un bocal sans qu'il se casse. Pour cela, on dispose d'une échelle dont les échelons sont équirépartis et on cherche à déterminer l'entier n tel que si on lâche un bocal de l'échelon n il se casse alors qu'il ne se casse pas si on le lâche de l'échelon $n-1$.

Si on dispose d'un seul bocal, on peut clairement déterminer l'entier n en faisant n expériences : on lâche successivement le bocal des échelons 1, 2, 3, … et lorsqu'il se casse on a déterminé n.

a) On dispose maintenant de 2 bocaux. Donner un algorithme A_2 qui permet de déterminer l'entier n avec un nombre d'expériences $f_2(n)$ sous-linéaire, i.e., $\lim_{n\to+\infty} \frac{f_2(n)}{n} = 0$.

b) Pour $k > 2$, donner un algorithme A_k qui permet de déterminer l'entier n en utilisant au plus k bocaux et en faisant un nombre d'expériences $f_k(n)$ tel que $\lim_{n\to+\infty} \frac{f_k(n)}{f_{k-1}(n)} = 0$.

3 Relais pour téléphones mobiles

On considère une route *droite* sur laquelle se trouvent n maisons. On cherche à placer des relais pour téléphones mobiles le long de la route de telle sorte que chaque maison se trouve à une distance au plus K d'un relais. On veut bien sûr minimiser le nombre de relais utilisés.

Formellement, une donnée du problème est une suite de réels $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$. Une solution est une suite $y_1, y_2, \ldots, y_m$ de réels telle que

$$\forall\, 1 \leq i \leq n, \exists\, 1 \leq j \leq m, \qquad |x_i - y_j| \leq K. \tag{1}$$

L'objectif est de trouver une solution optimale en temps linéaire.

Bien lire toutes les questions avant de commencer.

a) Proposer un algorithme pour résoudre le problème et montrer qu'il fonctionne en temps $\mathcal{O}(n)$.

b) Prouver avec la méthode de Hoare que les solutions fournies par votre algorithme sont correctes, i.e., qu'elles vérifient (1).

c) Prouver que les solutions fournies par votre algorithme sont optimales, i.e., qu'elles utilisent un nombre minimal de relais.

4 Sélection optimale de tâches

Un travailleur indépendant doit choisir les tâches qu'il va réaliser pour chacune des semaines à venir. Chaque semaine, on lui propose une tâche particulièrement éprouvante qu'il ne peut réaliser que si la semaine précédente il était en vacances ; et une tâche facile qu'il peut réaliser quoi qu'il ait fait la semaine précédente. Chaque semaine il peut réaliser au plus une tâche et bien sûr, la tâche éprouvante est mieux rémunérée que la facile. Il va chercher à maximiser son revenu.

Formellement, la donnée du problème est une suite de couples (l_1,h_1), (l_2,h_2), $\ldots$, (l_n,h_n) décrivant pour chaque semaine $i \in \{1,\ldots,n\}$ la rémunération l_i pour la tâche facile et la rémunération h_i pour la tâche éprouvante. On suppose $l_i \leq h_i$ pour tout $1 \leq i \leq n$.

Une solution est une suite de choix $c_1, c_2, \ldots, c_n$ avec $c_i \in \{v,l,h\}$ pour chaque $1 \leq i \leq n$ et telle que si $1 < i \leq n$ et $c_i = h$ alors $c_{i-1} = v$.

a) Donner la solution optimale et le revenu associé pour la suite de couples

i	1	2	3	4
l_i	5	2	12	7
h_i	9	8	31	17

b) Même question pour la suite de couples

i	1	2	3	4	5	6	7
l_i	5	2	12	7	9	3	7
h_i	9	8	31	17	15	14	13

c) Donner un algorithme qui calcule en temps linéaire la solution optimale.

5 Points les plus proches

On se donne n points P_1, …, P_n 2 à 2 distincts dans un plan et on note (x_i,y_i) les coordonnées du point P_i. On note $d(P,Q)$ la distance euclidienne entre les deux points P et Q du plan.

Le problème est de déterminer un couple de points (P_i,P_j) avec $i \neq j$ dont la distance est minimale, i.e., $d(P_i,P_j) \leq d(P_k,P_\ell)$ pour tous $1 \leq k,\ell \leq n$ avec $k \neq \ell$.

On peut facilement résoudre ce problème en temps $\mathcal{O}(n^2)$. L'objectif est de le résoudre en temps $\mathcal{O}(n \log n)$.

a) Soit $E \subseteq \{1,\ldots,n\}$ les indices d'un sous-ensemble de points et soit $m = |E|$. Soit A la suite des éléments de E triée par abscisses croissantes. On peut voir A comme un tableau tel que $E = \{A[1],\ldots,A[m]\}$ et $x_{A[1]} \leq \cdots \leq x_{A[m]}$. De même, soit B un tableau représentant la suite des éléments de E triée par ordonnées croissantes.

Étant donnés les tableaux A et B, montrer que l'on peut construire, *en temps* $\mathcal{O}(m)$, des tableaux B_g et B_d tels que, en notant $k = \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$ on ait

- $\{B_g[1],\ldots,B_g[k]\} = \{A[1],\ldots,A[k]\}$,
- $\{B_d[1],\ldots,B_d[m-k]\} = \{A[k+1],\ldots,A[m]\}$,
- et les tableaux B_g et B_d sont triés par ordonnées croissantes :

$$y_{B_g[1]} \leq \cdots \leq y_{B_g[k]}$$
$$y_{B_d[1]} \leq \cdots \leq y_{B_d[m-k]}$$

b) On suppose que 3 points P_1, P_2 et P_3 sont dans une bande verticale de largeur δ, que la distance minimale entre ces points est au moins δ et qu'ils sont triés par ordonnées croissantes, i.e.,

- $|x_i - x_j| \leq \delta$ pour tous $1 \leq i,j \leq 3$,
- $d(P_i,P_j) \geq \delta$ si $i \neq j$, et
- $y_1 \leq y_2 \leq y_3$.

Montrer que $y_3 - y_1 \geq \delta\frac{\sqrt{3}}{2}$.

c) Soit B un tableau représentant les points P_1, …, P_n triés par ordonnées croissantes : $\{B[1],\ldots,B[n]\} = \{1,\ldots,n\}$ et $y_{B[1]} \leq \cdots \leq y_{B[n]}$. Soit $L \in \mathbb{R}$ et $\delta > 0$. On suppose $\{1,\ldots,n\}$ partitionné en deux ensembles E et F tels que $L - \delta \leq x_i \leq L \leq x_j \leq L + \delta$ pour tous $i \in E$ et $j \in F$. On suppose de plus que $d(P_i,P_j) \geq \delta$ pour tous $(i,j) \in E^2 \cup F^2$ tels que $i \neq j$. Montrer que l'on peut déterminer en temps $\mathcal{O}(n)$ s'il existe un couple de points vérifiant $0 < d(P_i,P_j) < \delta$ et dans l'affirmative calculer, toujours en temps linéaire, un tel couple de distance minimale.

d) Montrer que l'on peut résoudre en temps $\mathcal{O}(n \log n)$ le problème initial, i.e., trouver un couple de points (P_i,P_j) vérifiant $0 < d(P_i,P_j) \leq d(P_k,P_\ell)$ pour tous $1 \leq k,\ell \leq n$ avec $k \neq \ell$.