

## Projet SWITCHDESIGN (CMLA-LMT-LSV)

Conception de systèmes de commande à commutation pour les systèmes aux dérivées partielles

### Résumé

Ce projet conjoint CMLA-LMT-LSV concerne la conception de synthèse de commande à commutation dite “garantie-par-conception” (correct-by-design) pour les systèmes dynamiques régis par des équations aux dérivées partielles. La mention “garantie-par-conception” signifie que le système reste dans une zone de sûreté de fonctionnement par rapport à ces paramètres d’entrée. D’un point de vue théorique, il s’agit de prouver que l’état du système reste dans un domaine invariant admissible. L’étude se décompose principalement en deux étapes : i) une étape hors ligne d’apprentissage de la synthèse de commande commutée ; ii) l’utilisation en ligne de la loi de commande avec l’estimation en ligne et temps réel de l’état du système, étant donné des observations issues de capteurs. Nous envisageons d’explorer la piste des filtres de Kalman-Bucy en version déterministe, ainsi que des version “modèle réduit” pour réduire la complexité algorithmique et permettre le traitement “temps réel”.

**Mots clés.** Contrôle, commutateurs, “correct-by-design”, synthèse de lois de contrôle, estimation en ligne, filtrage, équations aux dérivées partielles, équation de la chaleur, apprentissage, réduction de modèle, dimensionalité, procédure hors ligne/en ligne, temps réel.

**Responsables.** Florian De Vuyst (CMLA), Christian Rey (LMT) et Laurent Fribourg (LSV)

**Équipe.** Co-responsables + Nicolas Vayatis (CMLA), Ludovic Chamoin (LMT), Romain Soulat, Sameh Mohamed (LSV)

**Durée.** 2 ans.

## 1 Motivation

Les systèmes de commande à commutation connaissent actuellement un fort développement en raison de leurs propriétés intrinsèques mais aussi en raison de leur facilité de mise en œuvre. Ils sont couramment utilisés par exemple dans les systèmes de conversion d’énergie qui jouent notamment un rôle important dans les énergies renouvelables : ils sont utilisés pour connecter les sources d’énergies renouvelables au réseau électrique global, optimiser l’efficacité des panneaux solaires et des éoliennes (voir Cervantes et al. [6]).

Dans les commandes par commutation (voir par exemple Iftime et al. [14]), la loi de contrôle sélectionne un mode de fonctionnement approprié afin de satisfaire une contrainte telle qu’un critère de performance ou la minimisation d’un coût (consommation d’énergie par exemple).

Chaque mode opératoire est décrit par un système d’équations d’évolution de l’état du système. Il peut s’agir d’équations différentielles (EDO) ou bien d’équations algébro-différentielles (EAD) ou d’équations aux dérivées partielles (EDP) selon les besoins de modélisation et la granularité de la description.

La synthèse de loi de commande par commutation repose essentiellement aujourd’hui sur des règles heuristiques “de bon sens” ou sur les plans d’expériences numériques empiriques. L’état du système n’est pas en général assuré de rester dans les bornes admissibles pour son bon fonctionnement. Il est par conséquent intéressant d’appliquer des *méthodes formelles* de synthèse de lois dite “garantie par conception” (correct-by-design en anglais) qui assure que le convertisseur reste dans une zone de sûreté de fonctionnement par rapport à ces paramètres d’entrée (voir Tabuada [20], Fribourg-Soulat [11]).

Récemment dans Fribourg-Soulat [12], une stratégie de contrôle pour un système gouverné par des équations aux dérivées partielles a été proposée. La stratégie permet de converger vers une solution discrète admissible périodique constituée d'une suite cyclique finie d'états. La méthode repose sur une technique de partitionnement de l'espace des états en une famille de régions dans lesquelles le contrôle est uniforme.

Dans le présent projet, nous souhaitons approfondir l'étude des systèmes à commutation pour des problèmes aux dérivées partielles en explorant de nouvelles pistes d'investigation, incluant notamment la question de l'estimation en ligne du système (voir Tuan et al. [22], Billot et al. [4]), l'estimation en temps réel nécessitant la réduction de modèle (cf par exemple Audouze et al. [3], Bouclier et al. [5], Forrester et al. [10]), le contrôle des différentes sources d'erreurs sur des quantités d'intérêt (cf par exemple Ladevèze et al. [15], Rey et al. [18]), la mesure des incertitudes sur les états et la synthèse de contrôle "sûr" sinon fiable. Nous envisageons l'utilisation de filtres de Kalman, en version probabiliste classique (voir par exemple Ali et al. [1], Emery [9], Sallberg et al [19] et Chu [7] pour les problèmes de thermique) ou déterministe (voir Willems [26], Trélat [21]). Il s'agira aussi d'utiliser des filtres de Kalman réduits avec des stratégies de réduction de modèles (voir notamment Yu et al. [25] sur le sujet) pour les questions de performance d'estimation en ligne.

## 2 Objectifs scientifiques

Par souci d'illustration et de simplicité, on définit le problème modèle suivant. Soit  $\Omega$  un domaine régulier de  $\mathbb{R}^d$ ,  $d \in \{1, 2, 3\}$   $\kappa \in \mathcal{C}(\Omega)$ . Soit  $T^0 \in H^1(\Omega)$  et soit  $f \in H^{1/2}(\partial\Omega)$  une fonction de trace sur  $\partial\Omega$ . Soit deux petits domaines  $\omega_1$  et  $\omega_2$  disjoints de  $\Omega$ . Soit  $c_1 \in \omega_1$  (resp.  $c_2 \in \omega_2$ ) un point de  $\omega_1$  où un capteur permet de retourner en tout instant  $t$  la température courante au point  $c_1$  (resp.  $c_2$ ). Les petits domaines  $\omega_1$  et  $\omega_2$  sont aussi les régions sur lesquelles on applique les contrôles  $u_1$  et  $u_2$  respectivement. Les contrôles  $u_1$  et  $u_2$  sont fonctions des valeurs de température  $T$  aux capteurs  $c_1$  et  $c_2$  et sont supposés être des fonctions constantes par morceaux dans un rectangle d'admissibilité  $[T_{min}, T_{max}] \times [T_{min}, T_{max}]$ . On considère  $T$  la solution du problème aux valeurs initiales et aux valeurs frontière (problème de la chaleur) :

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \nabla \cdot (\kappa \nabla T) = u_1(T(c_1), T(c_2)) 1_{\omega_1}(x) + u_2(T(c_1), T(c_2)) 1_{\omega_2}(x), \quad \text{dans } \Omega \times (0, t_f], \quad (1)$$

$$T(., t) = f(.) \quad \text{sur } \partial\Omega \times (0, t_f], \quad (2)$$

$$T(., t = 0) = T^0(.) \quad \text{dans } \Omega. \quad (3)$$

Le problème est de définir une synthèse de contrôle par commutation  $(u_1(., .), u_2(., .))$ , garantie par conception, c'est-à-dire qui permet de conserver la température dans le domaine admissible  $[T_{min}, T_{max}]^2$  étant donné les conditions aux limites  $f$  et la donnée initiale  $T^0$ .

Certains aspects des commandes par commutation pour le problème de la chaleur ont été étudiés par Zuazua [27] et tout récemment dans Lu-Zuazua [16]. On pourra se référer à ces deux articles pour la position détaillée du problème et certains aspects d'analyse.

### 2.1 Semi-discrétisation en espace

On simplifie les écritures en notant  $S = u_1(T(c_1), T(c_2)) 1_{\omega_1}(x) + u_2(T(c_1), T(c_2)) 1_{\omega_2}(x)$  la loi de contrôle dans l'équation de la chaleur (second membre). Pour  $f$ ,  $u^0$ ,  $u_1$  et  $u_2$  donnés, la formulation variationnelle du problème revient à rechercher  $T \in L^2(0, t_f, H^1(\Omega))$ ,  $T(t = 0) = T^0$ , telle que

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} T w + \int_{\Omega} \kappa \nabla T \cdot \nabla w = \int_{\Omega} S w$$

pour tout  $w \in H_0^1(\Omega)$ . Pour la discrétisation spatiale, une méthode d'éléments finis classique de type éléments de Lagrange conformes revient à chercher une solution discrète  $T^h \in L^2(0, t_f, W^h)$  solution du problème discret en espace (continu en temps) et de dimension finie

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega^h} T^h w^h + \int_{\Omega^h} \kappa \nabla T^h \cdot \nabla w^h = \int_{\Omega} S^h w^h$$

pour tout  $w^h \in W_0^h = \{v^h \in V^h, v^h = 0 \text{ sur } \partial\Omega^h\}$ . En décomposant  $T^h$  sur la base éléments finis, on tombe alors sur un problème différentiel standard de la forme

$$M \frac{dT}{dt} + KT = S(T), \quad (4)$$

$$T(t=0) = T^0 \quad (5)$$

où  $M$  et  $K$  sont les matrices de capacité et de conductivité respectivement, creuses, symétriques et définies positives. En raison du contrôle dépendant de l'état, le problème est non-linéaire. Mais comme le contrôle est supposé uniforme dans chaque zone de partitionnement dans l'espace  $(T(c_1), T(c_2))$ , le problème est localement linéaire tant qu'un switch n'est pas activé.

Au moins localement, le problème rentre ainsi dans le cadre des systèmes linéaires avec des sorties  $y$  et  $z$  :

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu, \quad (6)$$

$$y = Cx, \quad (7)$$

$$z = Hx. \quad (8)$$

L'état interne  $x$  est la variable cachée (dans notre exemple la température  $T$ ),  $y$  est une sortie observable (dans notre exemple  $T(c_1)$  et  $T(c_2)$ ) et  $z$  est une sortie d'intérêt. Soulignons que la discrétisation spatiale par éléments finis conduit a priori à une variable interne  $x$  de grande dimension.

## 2.2 Filtre de Kalman déterministe

Considérons maintenant des perturbations dans le système, respectivement  $d_1(t)$  et  $d_2(t)$  et le système perturbé

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu + Gd_1, \quad (9)$$

$$y = Cx + d_2, \quad (10)$$

$$z = Hx. \quad (11)$$

La quantité  $d_2$  représente un "bruit" dans les mesures et la quantité  $d_1$  représente plutôt une erreur de modèle. Dans une modélisation probabiliste,  $d_1$  et  $d_2$  seraient vus par exemple comme des processus stochastiques (Wiener). Dans une écriture déterministe, considérons  $d_1$  et  $d_2$  de régularité  $L^2$  en temps. Pour un filtrage sur un intervalle temporel borné, on considère la fonctionnelle de mesure d'incertitude

$$\mathcal{U}(x(0), d_1, d_2) := \frac{1}{2} \left( \|x(0) - x^0\|_{\Gamma}^2 + \|d_1\|_{L^2(0, t_f, \mathbb{R}^n)}^2 + \|d_2\|_{L^2(0, t_f, \mathbb{R}^y)}^2 \right)$$

où  $\Gamma$  représente la matrice de covariance a priori sur la donnée initiale. Alors la théorie du contrôle optimal nous permet de définir une trajectoire optimale et un estimateur optimal  $\hat{x}$  de l'état interne et un estimateur optimal  $\hat{z}$  de la sortie  $z$  étant donné une observation  $\tilde{y}$  de régularité  $L^2$  en temps qui minimisent la fonctionnelle d'incertitude [21, 26]. On trouve alors une équation différentielle d'évolution pour  $\hat{x}$  (avec  $\hat{x}(0) = x^0$ ) faisant intervenir une matrice de covariance  $\Sigma$  elle-même solution des équations différentielles de Riccati (voir [26]). Si on s'intéresse à un problème de filtrage en temps infini, la matrice de covariance  $\Sigma$  est alors constante et solution des équations de Riccati algébriques, ce qui simplifie le calcul du filtre optimal.

Le filtre de Kalman-Bucy est le filtre optimal pour les systèmes linéaires. On peut bien sûr définir des extensions pour les problèmes non-linéaires (EKF, UKF, filtres particuliers, ...). Un des avantages du filtre de Kalman est aussi de permettre d'avoir accès à la mesure de l'incertitude (incluant données, modèle et discrétisation) et ainsi, par propagation d'incertitude, de donner accès à l'erreur sur le résultat, ce qui est un atout ici pour concevoir (idéalement) des synthèses de commandes garanties par conception (correct-by-design) ou sinon avec un très bon niveau de confiance (avec des bornes de confiance, cf par exemple Contal et al [8]).

## 2.3 Objectifs scientifiques

Le programme scientifique porte sur les deux aspects principaux :

1. La synthèse d'une loi de commande par commutation, effectuée hors-ligne ;
2. L'utilisation effective "en ligne" de la loi de commande par commutation.

Concernant la synthèse de loi de commande par commutation, nous envisageons d'utiliser un filtre aux moindres carrés robuste tel que présenté précédemment pour construire une loi à commutation garantie par construction. Le filtre de Kalman (ou variantes) semble être un bon candidat quand de multiples sources d'erreurs sont présentes dans le système (erreur de modélisation, erreur de discrétisation). Pendant l'apprentissage de la loi de commande nous pouvons utiliser un solveur "fin" d'équation de la chaleur comme générateur de données "exactes". Néanmoins, la complexité algorithmique peut s'avérer élevée et l'utilisation des méthodologies de réduction de modèles semble appropriée. Il existe aussi des filtres de Kalman eux-mêmes "réduits", permettant l'accélération de calcul de l'estimateur  $\hat{x}$  (cf Yu et al. [25]).

Concernant l'utilisation "en ligne" de la loi de commande par commutation sur des mesures réelles  $\tilde{y}(t)$ , il s'agit alors de prendre en compte à la fois les erreurs de modèle, de discrétisation et de mesures. Pour les erreurs de modèles, il peut s'agir notamment d'une incertitude sur la valeur exacte du coefficient de conductivité thermique (par exemple un matériau composite). Nous avons aussi une dimension algorithmique intéressante sur cet aspect. Il s'agit de filtrer les données et/ou rechercher la commutation ad hoc en temps réel par rapport au flux de données  $\tilde{y}$  arrivant. Le filtrage peut à nouveau faire appel à de la réduction de modèle pour réduire la dimensionnalité du système discret. D'un point de vue calcul, nous pourrions aussi envisager l'utilisation de processeurs manycore (GPU, Xeon Phi) et recherche des algorithmes parallèles adaptés au calcul sur coprocesseurs manycore pour accélérer notablement le calcul.

## 3 Production scientifique attendue

Nous envisageons sur les deux ans la publication conjointe de deux articles dans des revues internationales de rang A et la publication de deux papiers de conférences, avec soumission par exemple à NCMIP (New Computational Methods for Inverse Problems) et à une conférence internationale sur le Contrôle.

## 4 Demande financière (sur deux ans)

Pour le présent projet, nous demandons une aide de fonctionnement qui nous permettra de financer des stages de Master sur le sujet ainsi que les frais d'inscription aux conférences. Nous demandons aussi une aide d'équipement pour le renouvellement des équipements informatiques de chacun des trois laboratoires impliqués.

|                |         |
|----------------|---------|
| Équipement     | 6000 €  |
| Fonctionnement | 15000 € |
| TOTAL          | 21000 € |

TABLE 1 – Récapitulatif de la demande financière

## Références

- [1] S.K. Ali, M.S. Hamed and M.F. Lighstone, Numerical study of the modeling error in the online input estimation algorithm used for inverse heat conduction problems (IHCPs), Journal of Physics : Conference Series 135, 012004, Proc. 6th Int. Conf. on inverse problems in Engineering : Theory and Practice (2008).
- [2] É. André, L. Fribourg, U. Kühne and R. Soulat. IMITATOR 2.5 : A Tool for Analyzing Robustness in Scheduling Problems. In Dimitra Giannakopoulou and Dominique Méry eds., FM'12, LNCS 7436, Springer, pages 33–36, August 2012.
- [3] C. Audouze, F. De Vuyst, P. Nair, Nonintrusive reduced-order modeling of parameterized time-dependent partial differential equations, Num. methods for Partial Diff. Equations, vol. 29 (5), pp 1587–1628, 2013.

- [4] Billot, R., El Faouzi, N.-E., Sau, J., De Vuyst, F. Integrating the Impact of Rain into Traffic Management : Online Traffic State Estimation Using Sequential Monte Carlo Techniques. *Transportation Research Records : Journal of the Transportation Research Board*, vol 2169, ISSN 0361-1981, pp.141-149, 2010.
- [5] Bouclier R., Louf F., Chamoin L., Real-time validation of mechanical models coupling PGD and constitutive relation error. *Computational Mechanics*. Vol 52. Num 4, Pages 861-883, 2013.
- [6] I. Cervantes, F. Perez-Pinal, A. Mendoza-Torres, Hybrid control of DC-DC power converters, Chap. 10 of *Renewable energy*, T.J. Hammons, 2009.
- [7] P. Chu, Inversion Algorithm Based on the Unscented Kalman Filter for Inverse Heat Conduction Problems, *Advanced Materials Research, MEMS and Mechanics*, Vol 705, 474–482 (2013).
- [8] E. Contal, D. Buffoni, A. Robicquet, N. Vayatis : Parallel Gaussian Process Optimization with Upper Confidence Bound and Pure Exploration. *Machine Learning and Knowledge Discovery in Databases - European Conference, ECML PKDD 2013. Lecture Notes in Computer Science* vol. 8188, pp.225-240, Springer, 2013.
- [9] A.F. Emery, Estimating parameters and refining thermal models by using the extended Kalman filter approach, *J. Heat Transfer* 126(5), 809–817 (2004).
- [10] A. Forrester, A. Sobester, A. Keane, *Engineering design via surrogate modelling : a practical guide*, Wiley, 2008.
- [11] L. Fribourg and R. Soulat, “Stability Controllers for Sampled Switched Systems”. In RP’13, LNCS 8169, pages 135-145. Springer, 2013.
- [12] L. Fribourg and R. Soulat, *Control of Switching Systems by Invariance Analysis : Application to Power Electronics*, ISTE-Wiley, London, 2013.
- [13] E. Goubault, M. Kieffer, S. Putot, Inner Approximated Reachability Analysis, submitted to *Hybrid Systems Computation and Control*, 2014.
- [14] O.V. Iftime and M.A. Demetriou, Optimal control of switched distributed parameter systems with spatially scheduled actuators, *J. of EFAC*, Vol 45 (2), pp 312-323, 2009.
- [15] Ladevèze P., Pled F., Chamoin L., New bounding techniques for goal-oriented error estimation applied to linear problems. *Int Journal for Numerical Methods in Engineering*. Vol 93. Num 13. Pages 1345-1380, 2013.
- [16] Q. Lu and E. Zuazua, Robust null controllability for heat equations with unknown switching control model, submitted to *AIMS Journal* (2014).
- [17] *Sliding Mode control in Engineering*, Control Engineering Series, edited by W. Perruquetti and J.P. Barbot, 2002.
- [18] Rey V., Rey C., Gosselet P., Strict error bound with separated contributions of the discretization and of the iterative solver in non-overlapping domain decomposition methods, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol 270, pp 293-303, 2014.
- [19] S.A. Sallberg, P.SP Maybeck and M.E. Oxley, Infinite-dimensional sampled-data Kalman filtering and the stochastic heat equation, In proceeding of : *Proceedings of the 49th IEEE Conference on Decision and Control, CDC 2010, December 15-17, 2010, Atlanta, Georgia, USA*, doi :10.1109/CDC.2010.571715.
- [20] P. Tabuada, *Verification and Control of Hybrid Systems : a Symbolic Approach*, Springer, 2009.
- [21] E. Trélat, *Contrôle optimal. Théorie et applications*, Vuibert, *Mathématiques concrètes*, 2è édition (2008).
- [22] Tuan, P.C., Lee, S.H., and Hou, W.T., “An Efficient On-line Thermal Input Estimation Method Using Kalman Filter and recursive Least Square Algorithm”, *Inverse Problems in Eng.*, 5, pp. 309–333. 1997.
- [23] V.I. Utlík, *Sliding modes in Control Optimization*, CCES, Springer Verlag, 2011.
- [24] D. Wang, P. Shi and W. Wang, Robust filtering and fault detection of switched delay systems, *Lecture Notes in Control and Information Science*, vol 445, 2013.
- [25] D.Yu and S.Chakravorty, An iterative proper orthogonal decomposition (i-POD technique with application to the filtering of partial differential equations, *Journal of Astronautical Sciences*, vol. Special issue on J. N. Juang’s 60th birthday, to appear, 2013.
- [26] J.C. Willems, Deterministic least squares filtering, *J. of Econometrics*, 118, 341–373 (2004).
- [27] E. Zuazua, Switching control, *J. Eur. Math. Soc.*, 13 (2011), 86–117.