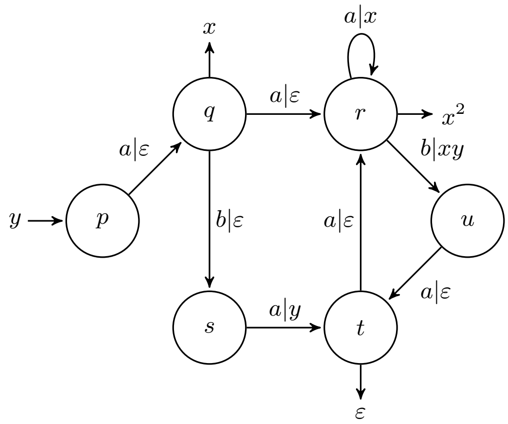
TD 15 : Fonctions séquentielles

Exercice 1 (**À préparer -** Minimisation)**.** Minimiser la fonction séquentielle $\{a, b\}^* \to \{x, y\}^*$ définie par l'automate suivant :



1. Calculer les préfixes minimaux $m_q = \bigwedge [\![A_q]\!](\{a, b\}^*)$ pour chaque état q de l'automate.
2. Donner l'automate normalisé équivalent.
3. Minimiser cet automate par raffinement de partitions.

Exercice 2 (Normalisation)**.** Soient $k > 1$ et $h \geq k$ deux bases entières ; on note $K = \{0, \ldots, k-1\}$ et $H = \{0, \ldots, h-1\}$ les alphabets d'écriture correspondants. On fait correspondre à un mot $u = a_n \cdots a_0$ de H^* écrit en base k une *valeur* $\mathsf{val}_k(u)$ définie comme

$$\mathsf{val}_k(u) = \sum_{i=0}^{n} a_i k^i \ .$$

La fonction de *normalisation* $\nu_{h,k}$ de H^* dans K^* préserve les valeurs en base k :

$$\mathsf{val}_k(\nu_{h,k}(u)) = \mathsf{val}_k(u) \ .$$

Par exemple pour $h = 4$ et $u = 333$, $\mathsf{val}_2(u) = 21$, $\nu_{4,2}(u) = 10101$.

1. Donner une fonction co-séquentielle pour $\nu_{4,2}$, c-à-d. séquentielle si on procède de droite à gauche (cela revient aussi dans notre cas à mettre le chiffre de poids faible en premier).
2. Montrer que $\nu_{h,k}$ est en général co-séquentielle.
3. En déduire que l'addition de deux nombres en base k et que la multiplication par une constante n sont co-séquentielles.
4. Appliquer cette construction à l'addition en base 2.

Exercice 3 (Analyseur syntaxique)**.** Construire une fonction séquentielle réalisant l'analyse syntaxique de la grammaire lexicale ci-dessous. Étant donné un mot d'entrée, l'analyseur devra renvoyer chaque lexème suivi de son type.

$$\begin{aligned} \text{identifier} &:= [a-z]([a-z] \cup [0-9])^* \\ \text{keyword} &:= if \mid then \mid else \mid elseif \\ \text{number} &:= [1-9]([0-9])^* \end{aligned}$$

D'autres symboles, comme l'espace (␣), peuvent être utilisés comme séparateurs.

Exercice 4 (Rechercher et remplacer)**.** Proposer une extension des fonctions séquentielles permettant d'effectuer des opérations du type "rechercher et remplacer". Par exemple, cette extension doit être capable de réaliser l'opération :

```
replace "#1's #2" with "#2 de #1"
```

Exercice 5 (Addition d'Avizienis)**.** Soit $k > 1$ un entier. Un système d'Avizienis est un procédé de numération en base k qui utilise des chiffres positifs et négatifs. De façon générale, si $D \subseteq \mathbb{Z}$ est un ensemble fini de chiffres, à chaque mot $u = a_n \cdots a_1 a_0 \in D^*$ (avec $a_i \in D$) on associe sa *valeur*, i.e., l'entier représenté par u en base k :

$$\mathsf{val}_k(u) = \sum_{i=0}^{n} a_i k^i \ .$$

Pour plus de lisibilité dans l'écriture d'un mot on utilisera de préférence $\bar{a}$ à la place du chiffre $-a$. Par exemple, $\mathsf{val}_2(10\bar{1}) = 3$ et $\mathsf{val}_{10}(3\bar{3}) = 27$.

Avec $A = \{0, \ldots, k-1\}$, les mots de $X = (A \setminus \{0\})A^* \cup \{\varepsilon\}$ correspondent à l'écriture usuelle des entiers en base k en commençant par le chiffre de poids fort. Cette écriture étant unique, l'application $\mathsf{val} : X \to \mathbb{N}$ est une bijection.

Soit $h = \lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor$ et $B = \{-h, \ldots, 0, \ldots, h\}$. Le système de numération d'Avizienis correspond aux mots de B^* (on peut éventuellement se restreindre à ceux qui ne commencent pas par 0). Dans ce système, la représentation d'un entier n'est pas unique. Par exemple, $\mathsf{val}_4(12\bar{2}) = \mathsf{val}_4(112)$.

1. Montrer qu'il existe une fonction séquentielle $f : A^* \to B^*$ qui préserve les valeurs, i.e., telle que $\mathsf{val}_k(u) = \mathsf{val}_k(f(u))$ pour tout $u \in A^*$.
2. On considère maintenant l'alphabet $C = \{-2h, \ldots, 0, \ldots, 2h\}$. Montrer qu'il existe une fonction séquentielle $f : C^* \to B^*$ qui préserve les valeurs, i.e., telle que $\mathsf{val}_k(u) = \mathsf{val}_k(f(u))$ pour tout $u \in C^*$.
   Indication : On pourra prendre comme ensemble d'états $Q = B^2 \setminus \{\bar{h}\bar{h}, hh\}$.
3. Existe-t-il une fonction séquentielle $g : (B \times B)^* \to B^*$ qui réalise l'addition dans le système d'Avizienis en commençant par le bit de poids fort, i.e., telle que pour tout $w = (a_n, b_n) \cdots (a_0, b_0) \in (B \times B)^*$ on a $\mathsf{val}_k(g(w)) = \mathsf{val}_k(a_n \cdots a_0) + \mathsf{val}_k(b_n \cdots b_0)$?