TD 14 : Fonctions séquentielles

Exercice 1 (**À préparer -** Machine de Moore)**.** Une *machine de* Moore de A dans B est un tuple $\mathcal{M} = \langle Q, A, B, \delta, \gamma, q_0 \rangle$ où Q est un ensemble fini d'états, $q_0 \in Q$ un état initial, A un alphabet d'entrée, B un alphabet de sortie, δ une fonction partielle de transition de $Q \times A$ dans Q, et γ une fonction de sortie de Q dans B^*. La fonction partielle $[\![\mathcal{M}]\!] : A^* \to B^*$ définie par $\mathcal{M}$ retourne la séquence des sorties associées par un run dans $\mathcal{M}$.

1. Montrer que si $\mathcal{M}$ est une machine de Moore, alors on peut donner une fonction séquentielle équivalente.
2. Montrer que si $\mathcal{A}$ est une fonction séquentielle (pure, ou machine de Mealy), alors on peut donner une machine de Moore équivalente.

Exercice 2 (**À préparer -** Fonctions non séquentielles)**.**

1. Montrer que la fonction successeur n'est pas séquentielle pour un codage binaire des entiers commençant par le bit de poids fort.
2. Montrer que la fonction $n \mapsto \lfloor n/3 \rfloor$ n'est pas séquentielle pour un codage binaire des entiers commençant par le bit de poids faible.
3. Montrer que la fonction $n \mapsto n^2$ n'est pas séquentielle, quelle que soit la position du bit de poids fort.

Exercice 3 (Fonction séquentielle pure)**.** Soient $\theta : A^* \to B^*$ une fonction et \$ un symbole qui n'appartient pas dans A. On définit la fonction $\tau : (A \cup \{\$\})^* \to B^*$ par, pour tout w de A^* :

$$\tau(w\$) = \theta(w)$$

où $\mathsf{dom}(\tau) = \mathsf{dom}(\theta) \cdot \{\$\}$. Montrer que θ est séquentielle si et seulement si τ est séquentielle pure.

Exercice 4 (Codes à délai de déchiffrage borné)**.**

1. Soit $\beta_1 : \{x, y\}^* \to A^*$ le morphisme défini par $\beta_1(x) = a$ et $\beta_1(y) = aba$. Montrer que ${\beta_1}^{-1}$ est une fonction séquentielle.
2. Même question pour $\beta_2 : \{x, y, z\}^* \to A^*$ défini par $\beta_2(x) = ab$, $\beta_2(y) = abb$ et $\beta_2(z) = baab$.
3. Généralisation. Soit $\beta : B^* \to A^*$ un morphisme. Par définition, $X = \beta(B)$ est un code si β est injectif. Le code X est dit à *délai de déchiffrage* d si, lorsqu'un mot $f = x_1 x_2 \dots x_{d+1} \in X^{d+1}$ est un préfixe d'un mot $g = y_1 y_2 \dots y_r \in X^*$, alors $x_1 = y_1$. (En particulier, un code est dit *préfixe* s'il a un délai de déchiffrage 0.)

   Montrer que l'ensemble $X = \beta(B)$ est un code à délai de déchiffrage fini si et seulement si β^{-1} est une fonction séquentielle.

Exercice 5 (Addition d'Avizienis)**.** Soit $k > 1$ un entier. Un système d'Avizienis est un procédé de numération en base k qui utilise des chiffres positifs et négatifs. De façon générale, si $D \subseteq \mathbb{Z}$ est un ensemble fini de chiffres, à chaque mot $u = a_n \cdots a_1 a_0 \in D^*$ (avec $a_i \in D$) on associe sa *valeur*, i.e., l'entier représenté par u en base k :

$$\mathsf{val}_k(u) = \sum_{i=0}^{n} a_i k^i \ .$$

Pour plus de lisibilité dans l'écriture d'un mot on utilisera de préférence $\bar{a}$ à la place du chiffre $-a$. Par exemple, $\mathsf{val}_2(10\bar{1}) = 3$ et $\mathsf{val}_{10}(3\bar{3}) = 27$.

Avec $A = \{0, \ldots, k-1\}$, les mots de $X = (A \setminus \{0\})A^* \cup \{\varepsilon\}$ correspondent à l'écriture usuelle des entiers en base k en commençant par le chiffre de poids fort. Cette écriture étant unique, l'application $\mathsf{val} : X \to \mathbb{N}$ est une bijection.

Soit $h = \lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor$ et $B = \{-h, \ldots, 0, \ldots, h\}$. Le système de numération d'Avizienis correspond aux mots de B^* (on peut éventuellement se restreindre à ceux qui ne commencent pas par 0). Dans ce système, la représentation d'un entier n'est pas unique. Par exemple, $\mathsf{val}_4(12\bar{2}) = \mathsf{val}_4(112)$.

1. Montrer qu'il existe une fonction séquentielle $f : A^* \to B^*$ qui préserve les valeurs, i.e., telle que $\mathsf{val}_k(u) = \mathsf{val}_k(f(u))$ pour tout $u \in A^*$.
2. On considère maintenant l'alphabet $C = \{-2h, \ldots, 0, \ldots, 2h\}$. Montrer qu'il existe une fonction séquentielle $f : C^* \to B^*$ qui préserve les valeurs, i.e., telle que $\mathsf{val}_k(u) = \mathsf{val}_k(f(u))$ pour tout $u \in C^*$.
   Indication : On pourra prendre comme ensemble d'états $Q = B^2 \setminus \{\bar{h}\bar{h}, hh\}$.
3. Existe-t-il une fonction séquentielle $g : (B \times B)^* \to B^*$ qui réalise l'addition dans le système d'Avizienis en commençant par le bit de poids fort, i.e., telle que pour tout $w = (a_n, b_n) \cdots (a_0, b_0) \in (B \times B)^*$ on a $\mathsf{val}_k(g(w)) = \mathsf{val}_k(a_n \cdots a_0) + \mathsf{val}_k(b_n \cdots b_0)$?