TD 12 : Automates à pile déterministes

Un automate à pile $\mathcal{A} = \langle Q, \Sigma, Z, T, q_0 z_0, F \rangle$ est dit *déterministe* si :
- $\forall (pz, a) \in QZ \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}), |T(pz, a)| \leq 1$;
- $\forall pz \in QZ, T(pz, \varepsilon) \neq \emptyset \Rightarrow \forall a \in \Sigma, T(pz, a) = \emptyset$.

Un langage algébrique $L \subseteq \Sigma^*$ est dit *déterministe* s'il existe un automate à pile déterministe qui accepte L par **état final**.

Exercice 1 (Exemples)**.** Montrer que les langages suivants sont déterministes. Sont-ils déterministes et temps-réel ? Déterministes et simples ?

1. $L_1 = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$
2. $L_2 = \{a^n b^p c a^n \ \ |n, p \geq 0\} \cup \{a^n b^p d b^p \ \ |n, p \geq 0\}$
3. $L_3 = D_n^*$, le langage de Dyck sur n paires de parenthèses.

1 Clôture par complémentaire

Le but de cette section est de montrer que les langages déterministes sont clos par complémentaire. Il y a deux difficultés principales à surmonter :
- L'automate peut se bloquer, soit parce que sa pile est vide ou qu'il n'y a pas de transition possible à partir de la configuration courante (deadlock), soit parce qu'il effectue un ε-calcul infini (livelock). Dans ces cas, l'automate rejette le mot d'entrée et il faut alors que l'automate complémentaire l'accepte.
- L'automate peut avoir plusieurs calculs sur un même mot d'entrée, causés par des ε-transitions possibles après la lecture de la dernière lettre de l'entrée. Certains de ces calculs peuvent être acceptants, et d'autres non. Il faut alors que l'automate complémentaire n'accepte que si **tous** ces calculs échouent.

Exercice 2 (Blocages)**.** Un automate à pile $\mathcal{A} = \langle Q, \Sigma, Z, T, q_0 z_0, F \rangle$ est dit *sans blocage* si, pour toute configuration accessible $p\alpha \in QZ^*$ et pour toute lettre $a \in \Sigma$, il existe un calcul $p\alpha \xrightarrow{\varepsilon}^* \xrightarrow{a}$.

Montrer qu'un automate à pile déterministe est sans blocage si et seulement si, pour toute configuration accessible $p\alpha$, on a :

1. $\alpha = x\beta$ avec $x \in Z$ et $\beta \in Z^*$;
2. soit $px \xrightarrow{\varepsilon}$, soit $\forall a \in \Sigma, px \xrightarrow{a}$;
3. $px \stackrel{\varepsilon}{\not\to}{}^\omega$

En déduire que l'on peut décider si un automate à pile déterministe est sans blocage. Montrer de plus que si un automate $\mathcal{A}$ est sans blocage, alors tout mot $w \in \Sigma^*$ admet un unique calcul maximal et fini dans $\mathcal{A}$.

Exercice 3 (Suppression des blocages)**.** Soit $\mathcal{A} = \langle Q, \Sigma, Z, T, q_0 z_0, F \rangle$ un automate à pile déterministe. Montrer que l'on peut effectivement construire un automate à pile déterministe et sans blocage $\mathcal{A}' = \langle Q', \Sigma, Z', T', q'_0 z'_0, F' \rangle$ qui reconnaît le même langage.

Exercice 4 (Clôture par complémentaire)**.** Soit $\mathcal{A} = \langle Q, \Sigma, Z, T, q_0 z_0, F\rangle$ un automate à pile déterministe. Montrer que l'on peut effectivement construire un automate à pile déterministe $\mathcal{A}'$ qui reconnaît $\Sigma^* - L(\mathcal{A})$.

2 Lemme d'itération

Les langages algébriques déterministes admettent un lemme d'itération plus puissant que dans le cas général.

Lemme 1 (Itération)**.** *Soit $L \subseteq \Sigma^*$ un langage algébrique déterministe. Il existe un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que tout mot $w \in L$ contenant au moins N lettres distinguées se factorise en $w = \alpha u \beta v \gamma$ avec :*

1. $\forall p \geq 0, \alpha u^p \beta v^p \gamma \in L(\mathcal{A})$;
2. *$u\beta v$ contient moins de N lettres distinguées ;*
3. *Soit α, u, β, soit β, v, γ contiennent des lettres distinguées ;*
4. *Pour tout $\gamma' \in \Sigma^*, (\exists p, \alpha u^p \beta v^p \gamma' \in L) \Rightarrow (\forall p, \alpha u^p \beta v^p \gamma' \in L)$.*

Utiliser ce lemme d'itération pour montrer que les langages algébriques suivants ne sont pas déterministes :

1. $L_1 = \{w\tilde{w} \mid w \in \Sigma^*\}$
2. $L_2 = \{a^n b^n \mid n \geq 0\} \cup \{a^n b^{2n} \mid n \geq 0\}$

3 Exercices complémentaires

Exercice 5 (Acceptation par pile vide)**.**

1. Montrer qu'un langage L est déterministe et préfixe ($L \cap L\Sigma^+ = \emptyset$) ssi il existe un automate déterministe qui accepte L par pile vide.
2. Montrer que pour les automates à pile déterministes, l'acceptation par pile vide est équivalente à l'acceptation par pile vide *et* état final.

Exercice 6 (Acceptation généralisée)**.** Soit $\mathcal{A} = \langle Q, \Sigma, Z, T, q_0 z_0, K\rangle$ un automate à pile déterministe avec acceptation généralisée par le langage rationnel $K \subseteq QZ^*$.

Montrer qu'on peut effectivement construire un automate à pile déterministe équivalent reconnaissant par état final.

Exercice 7 (Problèmes de décision)**.** Soit L un langage déterministe, et R un langage régulier.

1. Montrer que $L - R$ et $R - L$ sont déterministes.
2. Montrer que l'on peut décider si $R = L$.
3. Montrer que l'on peut décider si $R \subseteq L$.