TD 11 : Automates à pile

Exercice 1 (**À préparer** - Construction d'automates)**.** Donner des automates à pile reconnaissant les langages suivants :

1. $L_1 = \{w\tilde{w} \mid w \in \Sigma^*\}$
2. $L_2 = \overline{L}_1$
3. $L_3 = \overline{L}'$ avec $L' = \{ww \mid w \in \Sigma^*\}$
4. $L_4 = \{a^n b^n \mid n \geq 0\} \cup \{a^n b^{2n} \mid n \geq 0\}$

Exercice 2 (Automate push-pop)**.** Soit $\mathcal{A} = \langle Q, \Sigma, Z, T, q_0 z_0, F\rangle$ un automate à pile. Construire un automate à pile équivalent $\mathcal{A}' = \langle Q', \Sigma, Z', T', q_0' z_0, F'\rangle$ tel que chaque transition $\delta \in T'$ est du type *push* ou du type *pop*, avec :

- δ est du type push si δ est de la forme $(qz, \alpha, q'z'z)$, c'est-à-dire si δ rajoute exactement une lettre sur la pile.
- δ est du type pop si δ est de la forme (qz, α, q'), c'est-à-dire si δ efface exactement une lettre de la pile.

Exercice 3 (Mots de pile)**.** Soit $\mathcal{A} = \langle Q, \Sigma, Z, q_0 z_0, F\rangle$ un automate à pile.

Soit $pg \in QZ^*$, on pose :

$$\mathcal{C}(pg) = \{qh \in QZ^* \mid \exists pg \to^+ qh \text{ dans } \mathcal{T}\}$$

Le but de cet exercice est de montrer que $\mathcal{C}(pg)$ est un langage régulier et que l'on peut effectivement construire un automate fini le reconnaissant.

On pose $\Gamma = Q \uplus Z \uplus \overline{Q} \uplus \overline{Z}$, et les règles de réduction suivantes :

- $\overline{q}q \xrightarrow{\text{red}} \varepsilon$ pour $q \in Q$
- $\overline{z}z \xrightarrow{\text{red}} \varepsilon$ pour $z \in Z$

Pour $L \subseteq \Gamma^*$, on pose $\text{Clot}(L) = \{w \in \Gamma^* \mid \exists v \in L, v \xrightarrow{\text{red}}{}^* w\}$.

1. Montrer que, si L est régulier, alors $\text{Clot}(L)$ l'est aussi. Montrer que cette construction est effective.
2. Soit $K = \{qh\overline{xp} \mid px \xrightarrow{a} qh \text{ dans } T\}$. Montrer que $pg \to^n qh$ dans $\mathcal{T}$ si et seulement si il existe $w \in K^n$ tel que $wpg \xrightarrow{\text{red}}{}^{2n} qh$.
3. Conclure.

Exercice 4 (Calculs d'accessibilité)**.** Soit $\mathcal{A} = \langle Q, \Sigma, Z, T, q_0 z_0, F\rangle$ un automate à pile. Montrer que l'on peut calculer les ensembles suivants :

1. $X_1 = \{(p, z, q) \in Q \times Z \times Q \mid pz \to^+ q \text{ dans } \mathcal{T}\}$.
   On exprimera X_1 comme un plus petit point fixe.
2. $X_2 = \{(p, z) \in Q \times Z \mid pz \to^\omega \text{ dans } \mathcal{T}\}$.
   On exprimera X_2 comme un plus grand point fixe.