TD 10 : Automates à pile

Exercice 1 (**À préparer** - Construction d'automates)**.** Donner des automates à pile reconnaissant les langages suivants :

1. $L_1 = \{w\tilde{w} \mid w \in \Sigma^*\}$
2. $L_2 = \overline{L}_1$
3. $L_3 = \overline{L}'$ avec $L' = \{ww \mid w \in \Sigma^*\}$
4. $L_4 = \{a^n b^n \mid n \geq 0\} \cup \{a^n b^{2n} \mid n \geq 0\}$

Montrer de plus que L_1, L_2, L_3 et L_4 ne sont pas déterministes.

Exercice 2 (**À préparer** - Automate étendu)**.** On considère une extension des automates à pile $\mathcal{A} = \langle Q, \Sigma, Z, T, q_0 z_0, F\rangle$ définie telle que T est une partie finie de $QZ^* \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times QZ^*$. Un automate étendu ainsi peut donc effectuer la transition

$$pwh \xrightarrow{a} qw'h$$

si et seulement si $(pw, a, qw') \in T$. Autrement dit, ces automates lisent un mot de taille bornée du sommet de la pile plutôt que de se limiter au premier symbole.

Montrer que pour tout automate à pile étendu $\mathcal{A}$, il existe un automate à pile classique qui reconnaît le même langage.

Exercice 3 (Automate push-pop)**.** Soit $\mathcal{A} = \langle Q, \Sigma, Z, T, q_0 z_0, F\rangle$ un automate à pile. Construire un automate à pile équivalent $\mathcal{A}' = \langle Q', \Sigma, Z, T', q'_0 z_0, F'\rangle$ tel que chaque transition $\delta \in T'$ est du type *push* ou du type *pop*, avec :

- δ est du type push si δ est de la forme $(qz, \alpha, q'z'z)$, c'est-à-dire si δ rajoute exactement une lettre sur la pile.
- δ est du type pop si δ est de la forme (qz, α, q'), c'est-à-dire si δ efface exactement une lettre de la pile.

Exercice 4 (Calculs d'accessibilité)**.** Soit $\mathcal{A} = \langle Q, \Sigma, Z, T, q_0 z_0, F\rangle$ un automate à pile. Montrer que l'on peut calculer les ensembles suivants :

1. $X_1 = \{(p, z, q) \in Q \times Z \times Q \mid pz \rightarrow^+ q \text{ dans } T\}$.
   On exprimera X_1 comme un plus petit point fixe.
2. $X_2 = \{(p, z) \in Q \times Z \mid pz \rightarrow^\omega \text{ dans } T\}$.
   On exprimera X_2 comme un plus grand point fixe.

Exercice 5 (Acceptation par pile vide)**.**

1. Montrer qu'un langage L est déterministe et préfixe ($L \cap L\Sigma^+ = \emptyset$) ssi il existe un automate déterministe qui accepte L par pile vide.
2. Montrer que pour les automates à pile déterministes, l'acceptation par pile vide est équivalente à l'acceptation par pile vide *et* état final.

Exercice 6 (Acceptation généralisée)**.** Soit $\mathcal{A} = \langle Q, \Sigma, Z, T, q_0 z_0, K \rangle$ un automate à pile déterministe avec acceptation généralisée par le langage rationnel $K \subseteq QZ^*$.

Montrer qu'on peut effectivement construire un automate à pile déterministe équivalent reconnaissant par état final.

Exercice 7 (Problèmes de décision)**.** Soit L un langage déterministe, et R un langage régulier.

1. Montrer que $L - R$ et $R - L$ sont déterministes.
2. Montrer que l'on peut décider si $R = L$.
3. Montrer que l'on peut décider si $R \subseteq L$.