TD 10 : Langages déterministes

Exercice 1 (**À préparer** - Langages non déterministes)**.** Montrer que les langages suivants ne sont pas déterministes :

1. $L_1 = \{a^n b^n \mid n \geq 0\} \cup \{a^n b^{2n} \mid n \geq 0\}$
2. $L_2 = \{w\tilde{w} \mid w \in \Sigma^*\}$
3. $L_3 = \overline{L'}$, avec $L' = \{ww \mid w \in \Sigma^*\}$

Exercice 2 (**À préparer** - Automate shift-reduce)**.** On considère une extension des automates à pile $\mathcal{A} = \langle Q, \Sigma, Z, T, q_0 z_0, F\rangle$ définie telle que T est une partie finie de $QZ^* \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times QZ^*$. Un automate étendu ainsi peut donc effectuer la transition

$$pwh \xrightarrow{a} qw'h$$

si et seulement si $(pw, a, qw') \in T$. Autrement dit, ces automates lisent un mot de taille bornée du sommet de la pile plutôt que de se limiter au premier symbole.

1. Montrer que pour tout automate à pile étendu $\mathcal{A}$, il existe un automate à pile classique qui reconnaît le même langage.

Soit $G = \langle V, \Sigma, P, S\rangle$ une grammaire algébrique. On définit l'automate à pile étendu $\mathcal{A} = \langle \{q_0, q_f\}, \Sigma, Z, T, q_0 z_0, \{q_f\}\rangle$, où T est défini comme suit :

$$\begin{aligned} \text{pour tout } a \in \Sigma, (q_0\varepsilon, a, q_0 a) \in T \qquad & (\textit{shift}) \\ \text{pour tout } (x, \alpha) \in P, (q_0\tilde{\alpha}, \varepsilon, q_0 x) \in T \qquad & (\textit{reduce}) \\ (q_0 S z_0, \varepsilon, q_f) \in T \qquad & (\textit{end}) \end{aligned}$$

qui accepte par pile vide et état final.

2. Montrer que G et $\mathcal{A}$ reconnaissent le même langage.

Exercice 3 (Acceptation par pile vide)**.**

1. Montrer qu'un langage L est déterministe et préfixe ($L \cap L\Sigma^+ = \emptyset$) ssi il existe un automate déterministe qui accepte L par pile vide.
2. Montrer que pour les automates à pile déterministes, l'acceptation par pile vide est équivalente à l'acceptation par pile vide *et* état final.

Exercice 4 (Acceptation généralisée)**.** Soit $\mathcal{A} = \langle Q, \Sigma, Z, T, q_0 z_0\rangle$ un automate à pile et $K : Q \to \mathrm{Rec}(Z^*)$ une condition d'acceptation. Le langage reconnu par $\mathcal{A}$ est alors défini comme

$$L_K(\mathcal{A}) = \{w \in \Sigma^* \mid \exists q \in Q, \gamma \in K(q), (q_0, z_0) \xrightarrow{w} (q, \gamma)\} .$$

On retrouve les conditions d'acceptations classiques

- par état final en posant $K(q) = Z^*$ pour q dans F et $K(q) = \emptyset$ sinon,
- par pile vide en posant $K(q) = \{\varepsilon\}$ pour tout q de Q.

1. Montrer que l'on peut construire un automate à pile $\mathcal{A}'$ acceptant par état final tel que $L_K(\mathcal{A}) = L(\mathcal{A}')$.
2. Peut-on faire en sorte que, si $\mathcal{A}$ est déterministe, alors $\mathcal{A}'$ le soit aussi ?

Exercice 5 (Problèmes de décision)**.** Soit L un langage déterministe, et R un langage régulier.

1. Montrer que $L - R$ et $R - L$ sont déterministes.
2. Montrer que l'on peut décider si $R = L$.
3. Montrer que l'on peut décider si $R \subseteq L$.