

## TD 9 : Grammaires algébriques

**Exercice 1 (À préparer - Forme normale de Greibach).** Mettre les grammaires suivantes en forme normale de Greibach quadratique :

1.

$$G_1 : \begin{cases} x_1 \rightarrow x_1 b + a \\ x_2 \rightarrow x_1 b + a x_2 \end{cases}$$

2.

$$G_2 : \begin{cases} x_1 \rightarrow x_1(x_1 + x_2) + x_2(a + b) \\ x_2 \rightarrow x_1 x_2 + x_2 x_1 + a \end{cases}$$

Soit  $G$  la grammaire suivante :

$$E \rightarrow E + T \mid T$$

$$T \rightarrow T \times F \mid F$$

$$F \rightarrow (E) \mid a$$

Mettre  $G$  en forme normale de Chomsky, puis en forme normale de Greibach quadratique. Quelles sont les conséquences de ces deux transformations sur les arbres de dérivations de la grammaire ?

**Exercice 2 (Ambiguïté).**

1. Soit  $L = \{a^m b^m c^n \mid m, n \geq 0\} \cup \{a^m b^n c^n \mid m, n \geq 0\}$ . Montrer que  $L$  est algébrique. Montrer que  $L$  est inhéremment ambigu. (Indication : on pourra se servir du Lemme d'Ogden appliqué à  $a^k b^k c^{k+k!}$  pour un  $k$  bien choisi.)
2. Soit  $G$  la grammaire suivante :

$$S \rightarrow \text{if } c \text{ then } S \text{ else } S$$

$$S \rightarrow \text{if } c \text{ then } S$$

$$S \rightarrow a$$

Montrer que  $G$  est ambiguë, mais que le langage engendré par  $G$  ne l'est pas.

**Exercice 3 (Ambiguïté et indécidabilité).** Soit  $f, g : A^* \rightarrow B^*$  deux morphismes. Soit  $\$$  un symbole qui n'apparaît pas dans  $\Sigma$ . On note  $\bar{w}$  pour l'image miroir de  $w \in \Sigma^*$  et on pose  $L_f = \{w\$f(w) \mid w \in \Sigma^+\}$  et  $L_g = \{w\$g(\bar{w}) \mid w \in \Sigma^+\}$ .

1. Montrer qu'on ne peut pas décider si  $L_f \cap L_g = \emptyset$ .
2. Montrer que  $L_f$  et  $L_g$  ne sont pas ambigus. En déduire qu'on ne peut pas décider si une grammaire algébrique est ambiguë.  
Soit  $L_1 = \{a^n b^n c^m \mid m, n \geq 0\}$  et  $L_2 = \{a^n b^m c^m \mid m, n \geq 0\}$ .
3. On rappelle que  $L_1 \cup L_2$  est algébrique et inhéremment ambiguë. En déduire qu'on ne peut pas décider si un langage algébrique est inhéremment ambigu.

**Exercice 4** (Théorème de CHOMSKY et SCHÜTZENBERGER). Le théorème dit qu'un langage  $L$  est algébrique si et seulement s'il existe un entier  $n$ , un langage rationnel  $R$  et un morphisme  $\pi$  tels que  $L = \pi(D_n^* \cap R)$ , où  $D_n^*$  dénote l'ensemble des mots bien parenthésés sur un alphabet à  $n$  paires de parenthèses.

L'intuition derrière ce théorème est que l'on peut séparer les aspects de structure (le parenthésage, c'est-à-dire la structure d'arbre) et de contrôle (le langage rationnel) d'un langage algébrique – ce dont on verra une autre interprétation avec les automates à pile.

1. Soit  $G$  une grammaire algébrique sur  $\Sigma$ . Proposer une grammaire algébrique  $G'$ , qui explicite la structure des dérivations de  $G$  au moyen d'un alphabet  $\Sigma_n$  de  $n$  sortes de parenthèses, telle que

$$L(G') \subseteq D_n^* \text{ et } L(G) = \pi(L(G'))$$

avec  $\pi$  une projection de  $\Sigma_n^* \rightarrow \Sigma^*$ .

2. Il faut maintenant trouver un langage rationnel  $R$  tel que

$$L(G') = D_n^* \cap R.$$

Proposer un tel langage.

3. Montrer qu'il existe un morphisme  $\mu$  de  $\Sigma_n \rightarrow \Sigma_2$  tel que

$$D_n^* = \mu^{-1}(D_2^*).$$

En déduire une autre formulation du théorème.

**Exercice 5** (Intersection avec un rationnel). Soit  $G = \langle V, \Sigma, P, S \rangle$  une grammaire algébrique en forme normale quadratique et  $\mathcal{A} = \langle Q, \delta, q_0, F \rangle$  un automate fini. On s'intéresse à la complexité du problème du vide pour  $L = \mathcal{L}(G) \cap \mathcal{L}(\mathcal{A})$ .

1. Montrer que  $L$  est algébrique. Quelle est la taille précise de la grammaire ainsi obtenue pour  $L$  ?
2. Soit  $X$  une variable de  $G$ , et  $p, q$  deux états de  $\mathcal{A}$ , on pose :

$$f(X, p, q) = \begin{cases} 1 & \text{si } \exists w \in \Sigma^*, X \rightarrow^* w \text{ et } \delta(p, w) = q \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Quelle est la complexité d'évaluation de  $f$  ?

3. On pose

$$V_0 = \{(\alpha, p, q) \in \Sigma \times Q^2 \mid \delta(p, \alpha) = q\}$$

et pour tout  $n \geq 0$ ,

$$V_{n+1} = V_n \cup \{(X, p, q) \mid X \rightarrow YZ \text{ et } \exists r \in Q \text{ tel que } (Y, p, r) \in V_n \text{ et } (Z, r, q) \in V_n\}$$

Montrer que  $V_n$  converge vers un certain ensemble  $V_\infty$ . Quelle est la complexité d'évaluation de  $V_\infty$  ?