TD 9 : Automates à pile

Exercice 1 (Construction d'automates)**.** Donner des automates à pile reconnaissant les langages suivants :

1. $L_1 = \{w\tilde{w} \mid w \in \Sigma^*\}$
2. $L_2 = \overline{L}_1$
3. $L_3 = \overline{L}'$ avec $L' = \{ww \mid w \in \Sigma^*\}$

Exercice 2 (Formalismes équivalents)**.** Soit $\mathcal{A} = \langle Q, \Sigma, Z, T, q_0 z_0, F\rangle$ un automate à pile.

1. Construire un automate à pile équivalent $\mathcal{A}' = \langle Q', \Sigma, Z, T', q_0' z_0, F'\rangle$ tel que $T' \subseteq Q'Z \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times Q'Z^{\leq 2}$, c'est-à-dire tel que chaque transition écrit au plus deux lettres sur la pile.
2. Construire un automate à pile équivalent $\mathcal{A}' = \langle Q', \Sigma, Z, T', q_0' z_0, F'\rangle$ tel que chaque transition $\delta \in T'$ est du type *push* ou du type *pop*, avec :
   – δ est du type push si δ est de la forme $(qz, \alpha, q'z'z)$, c'est-à-dire si δ rajoute exactement une lettre sur la pile.
   – δ est du type pop si δ est de la forme (qz, α, q'), c'est-à-dire si δ efface exactement une lettre de la pile.

Exercice 3 (Calculs d'accessibilité)**.** Soit $\mathcal{A} = \langle Q, \Sigma, Z, T, q_0 z_0, F\rangle$ un automate à pile. Montrer que l'on peut calculer les ensembles suivants :

1. $X_1 = \{(p, z, q) \in Q \times Z \times Q \mid pz \to^+ q \text{ dans } T\}$.
   On exprimera X_1 comme un plus petit point fixe.
2. $X_2 = \{(p, z) \in Q \times Z \mid pz \to^\omega \text{ dans } T\}$.
   On exprimera X_2 comme un plus grand point fixe.