TD 8 : Grammaires algébriques

Exercice 1 (**À préparer** - Forme normale de Greibach)**.** Mettre les grammaires suivantes en forme normale de Greibach quadratique :

1. $$G_1 : \begin{cases} x_1 \to x_1 b + a \\ x_2 \to x_1 b + a x_2 \end{cases}$$

2. $$G_2 : \begin{cases} x_1 \to x_1(x_1 + x_2) + x_2(a + b) \\ x_2 \to x_1 x_2 + x_2 x_1 + a \end{cases}$$

Exercice 2 (**À préparer** - Ambiguïté et indécidabilité)**.** Soit $f, g : A^* \to B^*$ deux morphismes. Soit \$ un symbole qui n'apparaît pas dans Σ. On note $\overline{w}$ pour l'image miroir de $w \in \Sigma^*$ et on pose $L_f = \{w\$\overline{f(w)} \mid w \in \Sigma^+\}$ et $L_g = \{w\$\overline{g(w)} \mid w \in \Sigma^+\}$.

1. Montrer qu'on ne peut pas décider si $L_f \cap L_g = \emptyset$.
2. Montrer que L_f et L_g ne sont pas ambigus. En déduire qu'on ne peut pas décider si une grammaire algébrique est ambiguë.

   Soit $L_1 = \{a^n b^n c^m \mid m, n \geq 0\}$ et $L_2 = \{a^n b^m c^m \mid m, n \geq 0\}$.
3. On rappelle que $L_1 \cup L_2$ est algébrique et inhéremment ambiguë. En déduire qu'on ne peut pas décider si un langage algébrique est inhéremment ambigu.

Exercice 3 (Complexité)**.** On définit la *taille* d'une grammaire algébrique $G = \langle V, \Sigma, P, S\rangle$ comme

$$|G| = \sum_{A \to \alpha \in P} |A\alpha| + |V \cup \Sigma| \ .$$

1. Une grammaire algébrique est sous *forme quadratique* si pour toute règle $A \to \alpha$ de P, $|\alpha| \leq 2$. Montrer que, pour toute grammaire algébrique G, on peut construire une grammaire algébrique G' équivalente sous forme quadratique en temps $O(|G|)$.
2. Un symbole non terminal A de V est *utile* s'il existe une dérivation de la forme

   $$S \Rightarrow^* \alpha A \beta \Rightarrow^* w$$

   avec α et β des chaînes de symboles dans $(V \uplus \Sigma)^*$ et w un chaîne de symboles dans Σ^*.

   Montrer que pour toute grammaire algébrique G, on peut calculer l'ensemble de ses symboles non terminaux utiles en temps $O(|G|)$. En déduire un algorithme pour construire une grammaire *réduite* équivalente à G en temps linéaire.
3. En déduire une borne de complexité du calcul d'une grammaire algébrique équivalente où les règles $A \to \alpha$ de P vérifient $|\alpha| \geq 1$ (sauf potentiellement pour une règle $S \to \varepsilon$, mais alors on demande aussi $\alpha \in (\Sigma \cup V \backslash \{S\})^*$).

4. Quelle borne de complexité pouvez-vous donner pour la suppression des règles de la forme $A \to B$ avec A et B dans V ? Pour la mise sous forme normale de Chomsky ?

Exercice 4 (Intersection avec un rationnel)**.** Soit $G = \langle V, \Sigma, P, S\rangle$ une grammaire algébrique en forme normale quadratique et $\mathcal{A} = \langle Q, \delta, q_0, F\rangle$ un automate fini. On s'intéresse à la complexité du problème du vide pour $L = \mathcal{L}(G) \cap \mathcal{L}(\mathcal{A})$.

1. Montrer que L est algébrique. Quelle est la taille précise de la grammaire ainsi obtenue pour L ?
2. Soit X une variable de G, et p, q deux états de $\mathcal{A}$, on pose :

$$f(X,p,q) = \begin{cases} 1 & \text{si } \exists w \in \Sigma^*, X \to^* w \text{ et } \delta(p,w) = q \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

   Quelle est la complexité d'évaluation de f ?
3. On pose

$$V_0 = \{(\alpha, p, q) \in \Sigma \times Q^2 \mid \delta(p, \alpha) = q\}$$

   et pour tout $n \geq 0$,

$$V_{n+1} = V_n \cup \{(X,p,q) \mid X \to YZ \text{ et } \exists r \in Q \text{ tel que } (Y,p,r) \in V_n \text{ et } (Z,r,q) \in V_n\}$$

   Montrer que V_n converge vers un certain ensemble V_∞. Quelle est la complexité d'évaluation de V_∞ ?