

TD 7 : Logique sur les arbres Grammaires

Exercice 1 (À préparer - Construction de formules MSO). Donner une formule logique MSO définissant chacun des langages suivants :

1. L'ensemble des arbres d'arité au plus p dont la frontière est de longueur paire, c'est-à-dire dont la frontière est dans $(\Sigma\Sigma)^+$.
2. L'ensemble des arbres sur $\{a, b\}$ d'arité au plus p , tels que tout noeud étiqueté par a a un voisin (c'est-à-dire un père, frère ou enfant) étiqueté par b .
3. L'ensemble des arbres sur $\{a, b, c\}$ d'arité 2, dont tout noeud étiqueté par a a un descendant étiqueté par b .

Exercice 2 (À préparer - Construction de grammaires). Donner des grammaires contextuelles reconnaissant les langages suivants :

1. $L_1 = \{a^{n^2} \mid n \in \mathbb{N}^*\}$
2. $L_2 = \{ww \mid w \in \{a, b\}^+\}$
3. $L_3 = \{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$

Exercice 3 (Grammaire linéaire gauche). Montrer qu'un langage est rationnel si et seulement si il peut être engendré par une grammaire linéaire gauche.

Exercice 4 (Langages de Dyck). Soit $\Sigma_n = \{a_1, \dots, a_n\} \cup \{\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n\}$ l'alphabet formé de n paires de parenthèses. Soit $G_n = (\Sigma_n, V, P_n, S)$ la grammaire définie par $S \rightarrow a_1 S \bar{a}_1 S + \dots + a_n S \bar{a}_n S + \varepsilon$. Le langage $D_n^* = \mathcal{L}_{G_n}(S)$ est appelé langage de Dyck sur n paires de parenthèses.

1. Montrer que $D_1^* = \{w \in \Sigma_1^* \mid |w|_{a_1} = |w|_{\bar{a}_1} \text{ et } |v|_{a_1} \geq |v|_{\bar{a}_1} \text{ pour tous } v \leq w\}$
2. On considère le système de réécriture (de type 0) $R_n = (\Sigma_n, P'_n)$ dont les règles sont $P'_n = \{(a_i \bar{a}_i, \varepsilon \mid 1 \leq i \leq n)\}$.

Montrer que $D_n^* = \{w \in \Sigma_n^* \mid w \xrightarrow{*} \varepsilon \text{ dans } R_n\}$.

3. Soit Γ un alphabet disjoint de Σ_n , $\Sigma = \Sigma_n \cup \Gamma$ et $L \subset \Sigma^*$ un langage.

On définit la clôture $\text{clot}(L) = \{v \in \Sigma^* \mid \exists w \in L, w \xrightarrow{*} v \text{ dans } R_n\}$.

Montrer que si L est reconnaissable, alors $\text{clot}(L)$ l'est aussi.

On définit la réduction $\text{red}(L) = \{v \in \text{clot}(L) \mid v \not\xrightarrow{*} \text{ dans } R_n\}$.

Montrer que si L est reconnaissable, alors $\text{red}(L)$ l'est aussi.

Exercice 5 (Associativité). Soit $\Sigma_2 = \{f\}$ et Σ_0 un ensemble fini de symboles d'arité 0. On note $A(L)$ la clôture d'un langage L de $T(\Sigma)$ par $f(x, f(y, z)) = f(f(x, y), z)$.

1. Soient $t_1 = f(f(a, \square), b)$ et $t_2 = f(a, b)$; montrer que $A(t_1^* t_2)$ n'est pas reconnaissable.
2. Montrer que pour tout L de $T(\Sigma)$, on a $\text{Fr}(L) = \text{Fr}(A(L))$, où $\text{Fr}(L)$ dénote le langage des feuilles de L .

3. Montrer que pour tous L_1, L_2 de $T(\Sigma)$, $\text{Fr}(L_1) \cap \text{Fr}(L_2) = \text{Fr}(A(L_1) \cap A(L_2))$.
4. Montrer que la famille des $A(L)$ où L est un langage reconnaissable d'arbres n'est pas fermée par intersection.

Exercice 6 (Clôture ascendante et descendante). On dit qu'une formule MSO $\varphi(x, y)$ définit une relation binaire R si, pour tout arbre t et pour tous noeuds u, v de t , $x \mapsto u, y \mapsto v \models \varphi$ ssi $(u, v) \in R$.

1. Montrer que la relation $R_1 = \{(x, y) \mid x \text{ est un descendant de } y\}$ est définissable par une formule logique MSO.
2. Soit une relation binaire R définie par une formule MSO $\varphi(x, y)$. Montrer qu'il existe une formule MSO $\varphi^{\uparrow*}(x, y)$ qui définit la clôture réflexive et ascendante $R^{\uparrow*}$ de R , c'est-à-dire, $(x, y) \in R^{\uparrow*}$ si et seulement si, soit :
 - $x = y$.
 - $\exists z_1, \dots, z_n, z_1 = x, z_n = y$ et, $\forall i < n, (z_i, z_{i+1}) \in R \cap R_1$.
3. Même question pour la clôture réflexive et descendante $R^{\downarrow*}$ de R .
4. Qu'en est-il de la clôture réflexive et transitive R^* de R ?