TD 6 : Automates d'arbres résiduels, itérations, substitutions

Exercice 1 (**À préparer** - Langages non reconnaissables)**.** Soit $\Sigma = \{a, b, c\}$.

1. Montrer que l'ensemble des arbres d'arité au plus p sur Σ ayant le même nombre de nœuds étiquetés par a et par b n'est pas reconnaissable.
2. Soit L un langage d'arbres d'arité au plus p sur Σ tel que $\mathrm{Fr}(L) = \{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ Montrer que L n'est pas reconnaissable. Qu'en est-il pour $\mathrm{Fr}(L) = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$?
3. Un arbre binaire est équilibré si pour chaque noeud, la différence de hauteur entre le sous-arbre droit et le sous-arbre gauche est au plus 1. Montrer que l'ensemble des arbres binaires complets équilibrés sur Σ n'est pas reconnaissable.

Exercice 2 (**À préparer** - Calcul de résiduels)**.**

1. Soit $t_1 = c(a, \Box, b)$ et $t_2 = c(a, b)$. Calculer tous les résiduels du langage $L = t_1^* t_2$. En déduire que L est reconnaissable.
2. Soit t_n^α l'arbre binaire complet de profondeur n dont tous les noeuds sont étiquetés par α. Montrer que le langage $L = \{c(t_n^a, t_n^b) \mid n \in \mathbb{N}\}$ a un nombre infini de résiduels. En déduire que L n'est pas reconnaissable.
3. Soit $L \subseteq \Sigma^*$ un langage rationnel fixé. Décrire les résiduels de l'ensemble des arbres d'arité au plus p dont la frontière est dans L. Montrer qu'il y a un nombre fini de tels résiduels.

Exercice 3 (Substitution de langages)**.** Une *substitution de langages* σ sur $T(\mathcal{F} \cup \mathcal{X})$ est une application d'un sous-ensemble fini de $\mathcal{X}$ dans $2^{T(\mathcal{F} \cup \mathcal{X})}$, définie comme suit.

Si $\sigma = [L_1/x_1, \ldots, L_n/x_n]$ et t est un terme, alors $\sigma(t)$ est l'ensemble des termes sur $T(\mathcal{F} \cup \mathcal{X})$ tels que :

- $\sigma(x_i) = L_i$
- $\sigma(f) = \{f\}$ si $f \in \mathcal{F} \cup \mathcal{X} - \{x_1, \ldots, x_n\}$
- $\sigma(f(s_1, \ldots, s_k)) = \{f(t_1, \ldots, t_k) \mid t_i \in \sigma(s_i)\}$

De plus, soit L un langage sur $T(\mathcal{F} \cup \mathcal{X})$, on pose $\sigma(L) = \cup_{t \in L} \sigma(t)$.

1. Soit $L_{k,x}$ l'ensemble des termes où la variable $x \in \mathcal{X}$ apparaît exactement k fois. Montrer que $L_{k,x}$ est reconnaissable. Donner un automate reconnaissant $[\{a, b\}/x](L_{k,x})$.
2. Montrer que si $L, L_1, \ldots, L_n$ sont des langages reconnaissables, alors $[L_1/x_1, \ldots, L_n/x_n](L)$ est reconnaissable.

De plus, on note :

- $L \cdot_i M = [M/x_i](L)$
- $L^{0,i} = \{x_i\}$
- $L^{n+1,i} = L^{n,i} \cup L \cdot_i L^{n,i}$
- $L^{*,i} = \cup_n L^{n,i}$

3. Soit L un langage reconnaissable. Montrer que, pour tout $n \geq 0$ et pour tout i tel que $x_i \in \mathcal{X}$, $L^{n,i}$ est reconnaissable. Montrer que $L^{*,i}$ est reconnaissable.

Exercice 4 (Construction de formules MSO)**.** Donner une formule logique MSO définissant chacun des langages suivants :

1. L'ensemble des arbres d'arité au plus p dont la frontière est de longueur paire, c'est-à-dire dont la frontière est dans $(\Sigma\Sigma)^+$.
2. L'ensemble des arbres sur $\{a, b\}$ d'arité au plus p, tels que tout noeud étiqueté par a a un voisin (c'est-à-dire un père, frère ou enfant) étiqueté par b.
3. L'ensemble des arbres sur $\{a, b, c\}$ d'arité 2, dont tout noeud étiqueté par a a un descendant étiqueté par b.

Exercice 5 (Des formules aux automates)**.** Donner des automates d'arbres reconnaissant les langages d'arbres d'arité au plus 2 définis par les formules suivantes :

1. $(x \in S \wedge (x \downarrow_1 y \Rightarrow y \in S)) \wedge (z \in S \Rightarrow P_a(z))$
2. $(x \in S \wedge (x \downarrow_1 y \Rightarrow y \in S)) \wedge (\forall z, z \in S \Rightarrow P_a(z))$
3. $\exists S, (x \in S \wedge (x \downarrow_1 y \Rightarrow y \in S)) \wedge (\forall z, z \in S \Rightarrow P_a(z))$
4. $\exists S \forall y, (x \in S \wedge (x \downarrow_1 y \Rightarrow y \in S)) \wedge (\forall z, z \in S \Rightarrow P_a(z))$

Exercice 6 (Associativité)**.** Soit $\Sigma_2 = \{f\}$ et Σ_0 un ensemble fini de symboles d'arité 0. On note $\mathsf{A}(L)$ la clôture d'un langage L de $T(\Sigma)$ par $f(x, f(y, z)) = f(f(x, y), z)$.

1. Soient $t_1 = f(f(a, \square), b)$ et $t_2 = f(a, b)$; montrer que $\mathsf{A}(t_1^* t_2)$ n'est pas reconnaissable.
2. Montrer que pour tout L de $T(\Sigma)$, on a $\mathrm{Fr}(L) = \mathrm{Fr}(\mathsf{A}(L))$, où $\mathrm{Fr}(L)$ dénote le langage des feuilles de L.
3. Montrer que pour tous L_1, L_2 de $T(\Sigma)$, $\mathrm{Fr}(L_1) \cap \mathrm{Fr}(L_2) = \mathrm{Fr}(\mathsf{A}(L_1) \cap \mathsf{A}(L_2))$.
4. Montrer que la famille des $\mathsf{A}(L)$ où L est un langage reconnaissable d'arbres n'est pas fermée par intersection.

Exercice 7 (Clôture ascendante et descendante)**.** On dit qu'une formule MSO $\varphi(x, y)$ définit une relation binaire R si, pour tout arbre t et pour tous noeuds u, v de t, $t, x \mapsto u, y \mapsto v \models \varphi$ ssi $(u, v) \in R$.

1. Montrer que la relation $R_1 = \{(x, y) \mid x \text{ est un descendant de } y\}$ est définissable par une formule logique MSO.
2. Soit une relation binaire R définie par une formule MSO $\varphi(x, y)$. Montrer qu'il existe une formule MSO $\varphi^{\uparrow^*}(x, y)$ qui définit la clôture reflexive et ascendante $R^{\uparrow^*}$ de R, c'est-à-dire, $(x, y) \in R^{\uparrow^*}$ si et seulement si, soit :
   - $x = y$.
   - $\exists z_1, \ldots, z_n, z_1 = x, z_n = y$ et, $\forall i < n, (z_i, z_{i+1}) \in R \cap R_1$.
3. Même question pour la clôture reflexive et descendante $R^{\downarrow^*}$ de R.
4. Qu'en est-il de la clôture reflexive et transitive R^* de R ?

Exercice 8 (Minimisation)**.** Faire l'exercice 1.c) du partiel du 24 mai 2012.