TD 5 : Automates d'arbres

Exercice 1 (**À préparer** - Construction d'automates)**.** Soit $L \subseteq \Sigma^*$ un langage rationnel fixé. Construire des automates d'arbres (ascendants ou descendants, au choix) reconnaissant les langages d'arbres d'arité au plus p suivants :

1. Les arbres dont la frontière est dans L. On pourra se servir de la caractérisation par monoïde de L.
2. Les arbres dont les étiquettes de toutes les branches sont dans L.
3. Les arbres dont l'étiquette d'au moins une branche est dans L.

Exercice 2 (**À préparer** - Reconnaissance généralisée)**.** On considère le problème de décision suivant :

instance un terme t de $T(\mathcal{F}, \mathcal{X})$ et un automate d'arbres $\mathcal{A}$

question est-ce qu'il existe une instance close de t acceptée par $\mathcal{A}$?

1. Montrer que si t est un terme linéaire, alors ce problème est dans PTime.
2. Montrer que si t n'est pas linéaire mais $\mathcal{A}$ est déterministe, alors ce problème est NP-complet (on pourra chercher une réduction depuis SAT).

Exercice 3 (Problèmes de décision)**.**

1. Montrer que le problème du vide du langage d'un automate d'arbre peut être résolu en temps linéaire.
2. Montrer que les langages reconnaissables d'arbre sont clos par intersection. En déduire que le problème d'appartenance d'un arbre à un automate d'arbre est dans PTime.

Exercice 4 (Clôture par les chemins)**.** Soit t un arbre de $T(\Sigma)$ d'arité maximale p. On définit le *langage des chemins* $\pi(t)$ de t sur $\Sigma \uplus \{1, \ldots, p\}$ par

$$\pi(t) = \begin{cases} t & \text{si } t \in \Sigma_0 \\ \bigcup_{i=1}^{n} \{fiw \mid w \in \pi(t_i)\} & \text{si } t = f(t_1, \ldots, t_n) \end{cases}$$

$$\pi(L) = \bigcup_{t \in L} \pi(t)$$

et la *clôture par les chemins* de L comme

$$\mathsf{P}(L) = \{t \in T(\Sigma) \mid \pi(t) \subseteq \pi(L)\}$$

1. Montrer que si L est un langage reconnaissable d'arbres, alors $\pi(L)$ est un langage reconnaissable de mots.
2. Montrer que si L est un langage reconnaissable d'arbres, alors $\mathsf{P}(L)$ en est aussi un.

3. Montrer qu'un langage reconnaissable d'arbres est clos par les chemins (c-à-d. $L = \mathsf{P}(L)$) si et seulement s'il est reconnu par un automate descendant déterministe.
4. Peut-on décider si un langage reconnaissable d'arbres est clos par les chemins ?

Exercice 5 (Un seul arbre)**.** Montrer que le problème de décision suivant est dans PTime :

instance un automate d'arbres $\mathcal{A}$

question est-ce que $|L(\mathcal{A})| = 1$?