TD 5 : Automates d'arbres

Exercice 1 (**À préparer** - Construction d'automates)**.** Soit $L \subseteq \Sigma^*$ un langage rationnel fixé. Construire des automates d'arbres (ascendants ou descendants, au choix) reconnaissant les langages d'arbres d'arité au plus p suivants :

1. Les arbres dont la frontière est dans L. On pourra se servir de la caractérisation par monoïde de L.
2. Les arbres dont les étiquettes de toutes les branches sont dans L.
3. Les arbres dont l'étiquette d'au moins une branche est dans L.

Exercice 2 (**À préparer** - Langages sans étoile)**.**

1. Sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$, construire les monoïdes syntaxiques des langages suivants : Σ^*, $\Sigma^* a \Sigma^* b \Sigma^*$, $a^* b^*$, $\{w \in \Sigma^* \mid |w|_a \text{ impair}\}$.
2. Pour chacun de ces langages, justifier s'il est sans étoile ou pas.
3. Pour les langages sans étoile, construire des expressions sans étoile équivalentes, c'est-à-dire en utilisant uniquement des langages finis, l'union, la concaténation, et le complémentaire.
4. Pour les langages sans étoile, construire des formules du premier ordre équivalentes à ces langages.

Exercice 3 (Problèmes de décision)**.**

1. Montrer que le problème du vide du langage d'un automate d'arbre peut être résolu en temps linéaire.
2. Montrer que les langages reconnaissables d'arbre sont clos par intersection. En déduire que le problème d'appartenance d'un arbre à un automate d'arbre est dans PTime.

Exercice 4 (Clôture par les chemins)**.** Soit t un arbre de $T(\Sigma)$ d'arité maximale p. On définit le *langage des chemins* $\pi(t)$ de t sur $\Sigma \uplus \{1, \ldots, p\}$ par

$$\pi(t) = \begin{cases} t & \text{si } t \in \Sigma_0 \\ \bigcup_{i=1}^{n} \{f i w \mid w \in \pi(t_i)\} & \text{si } t = f(t_1, \ldots, t_n) \end{cases}$$

$$\pi(L) = \bigcup_{t \in L} \pi(t)$$

et la *clôture par les chemins* de L comme

$$\mathsf{P}(L) = \{t \in T(\Sigma) \mid \pi(t) \subseteq \pi(L)\}$$

1. Montrer que si L est un langage reconnaissable d'arbres, alors $\pi(L)$ est un langage reconnaissable de mots.

2. Montrer que si L est un langage reconnaissable d'arbres, alors $\mathsf{P}(L)$ en est aussi un.
3. Montrer qu'un langage reconnaissable d'arbres est clos par les chemins (c-à-d. $L = \mathsf{P}(L)$) si et seulement s'il est reconnu par un automate descendant déterministe.
4. Peut-on décider si un langage reconnaissable d'arbres est clos par les chemins ?

Exercice 5 (Reconnaissance généralisée)**.** On considère le problème de décision suivant :

instance un terme t de $T(\mathcal{F}, \mathcal{X})$ et un automate d'arbres $\mathcal{A}$

question est-ce qu'il existe une instance close de t acceptée par $\mathcal{A}$?

1. Montrer que si t est un terme linéaire, alors ce problème est dans PTime.
2. Montrer que si t n'est pas linéaire mais $\mathcal{A}$ est déterministe, alors ce problème est NP-complet (on pourra chercher une réduction depuis SAT).

Exercice 6 (Un seul arbre)**.** Montrer que le problème de décision suivant est dans PTime :

instance un automate d'arbres $\mathcal{A}$

question est-ce que $|L(\mathcal{A})| = 1$?

Exercice 7 (Construction de formules MSO)**.** Donner une formule logique MSO définissant chacun des langages suivants :

1. L'ensemble des arbres d'arité au plus p dont la frontière est de longueur paire, c'est-à-dire dont la frontière est dans $(\Sigma\Sigma)^+$.
2. L'ensemble des arbres sur $\{a, b\}$ d'arité au plus p, tels que tout noeud étiqueté par a a un voisin (c'est-à-dire un père, frère ou enfant) étiqueté par b.
3. L'ensemble des arbres sur $\{a, b, c\}$ d'arité 2, dont tout noeud étiqueté par a a un descendant étiqueté par b.

Exercice 8 (Clôture ascendante et descendante)**.** On dit qu'une formule MSO $\varphi(x, y)$ définit une relation binaire R si, pour tout arbre t et pour tous noeuds u, v de t, $t, x \mapsto u, y \mapsto v \models \varphi$ ssi $(u, v) \in R$.

1. Montrer que la relation $R_1 = \{(x, y) \mid x \text{ est un descendant de } y\}$ est définissable par une formule logique MSO.
2. Soit une relation binaire R définie par une formule MSO $\varphi(x, y)$. Montrer qu'il existe une formule MSO $\varphi^{\uparrow^*}(x, y)$ qui définit la clôture reflexive et ascendante $R^{\uparrow^*}$ de R, c'est-à-dire, $(x, y) \in R^{\uparrow^*}$ si et seulement si, soit :
   – $x = y$.
   – $\exists z_1, \ldots, z_n, z_1 = x, z_n = y$ et, $\forall i < n, (z_i, z_{i+1}) \in R \cap R_1$.
3. Même question pour la clôture reflexive et descendante $R^{\downarrow^*}$ de R.
4. Qu'en est-il de la clôture reflexive et transitive R^* de R ?