TD 5 : Automates d'arbres résiduels, itérations, substitutions

Exercice 1 (**À préparer** - Langages non reconnaissables)**.** Soit $\Sigma = \{a, b, c\}$.

1. Montrer que l'ensemble des arbres d'arité au plus p sur Σ ayant le même nombre de nœuds étiquetés par a et par b n'est pas reconnaissable.
2. Soit L un langage d'arbres d'arité au plus p sur Σ tel que $\mathrm{Fr}(L) = \{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un arbre de L dont la frontière est $a^n b^n c^n$. Montrer que L n'est pas reconnaissable. Qu'en est-il pour $\mathrm{Fr}(L) = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$?
3. Un arbre binaire est équilibré si pour chaque noeud, la différence de hauteur entre le sous-arbre droit et le sous-arbre gauche est au plus 1. Montrer que l'ensemble des arbres binaires complets équilibrés sur Σ n'est pas reconnaissable.

Exercice 2 (**À préparer** - Calcul de résiduels)**.**

1. Soit $t_1 = c(a, \square, b)$ et $t_2 = c(a, b)$. Calculer tous les résiduels du langage $L = t_1^* t_2$. En déduire que L est reconnaissable.
2. Soit t_n^α l'arbre binaire complet de profondeur n dont tous les noeuds sont étiquetés par α. Montrer que le langage $L = \{c(t_n^a, t_n^b) \mid n \in \mathbb{N}\}$ a un nombre infini de résiduels. En déduire que L n'est pas reconnaissable.
3. Soit $L \subseteq \Sigma^*$ un langage rationnel fixé. Décrire les résiduels de l'ensemble des arbres d'arité au plus p dont la frontière est dans L. Montrer qu'il y a un nombre fini de tels résiduels.

Exercice 3 (Substitution de langages)**.** Une *substitution de langages* σ sur $T(\mathcal{F} \cup \mathcal{X})$ est une application d'un sous-ensemble fini de $\mathcal{X}$ dans $2^{T(\mathcal{F} \cup \mathcal{X})}$, définie comme suit.

Si $\sigma = [L_1/x_1, \ldots, L_n/x_n]$ et t est un terme, alors $\sigma(t)$ est l'ensemble des termes sur $T(\mathcal{F} \cup \mathcal{X})$ tels que :
- $\sigma(x_i) = L_i$
- $\sigma(f) = \{f\}$ si $f \in \mathcal{F} \cup \mathcal{X} - \{x_1, \ldots, x_n\}$
- $\sigma(f(s_1, \ldots, s_k)) = \{f(t_1, \ldots, t_k) \mid t_i \in \sigma(s_i)\}$

De plus, soit L un langage sur $T(\mathcal{F} \cup \mathcal{X})$, on pose $\sigma(L) = \cup_{t \in L} \sigma(t)$.

1. Soit $L_{k,x}$ l'ensemble des termes où la variable $x \in \mathcal{X}$ apparaît exactement k fois. Montrer que $L_{k,x}$ est reconnaissable. Donner un automate reconnaissant $[\{a, b\}/x](L_{k,x})$.
2. Montrer que si $L, L_1, \ldots, L_n$ sont des langages reconnaissables, alors $[L_1/x_1, \ldots, L_n/x_n](L)$ est reconnaissable.

De plus, on note :
- $L \cdot_i M = [M/x_i](L)$
- $L^{0,i} = \{x_i\}$
- $L^{n+1,i} = L^{n,i} \cup L \cdot_i L^{n,i}$
- $L^{*,i} = \cup_n L^{n,i}$

3. Soit L un langage reconnaissable. Montrer que, pour tout $n \geq 0$ et pour tout i tel que $x_i \in \mathcal{X}$, $L^{n,i}$ est reconnaissable. Montrer que $L^{*,i}$ est reconnaissable.

Exercice 4 (Problèmes de décision)**.**

1. Montrer que le problème du vide du langage d'un automate d'arbre peut être résolu en temps linéaire.
2. Montrer que les langages reconnaissables d'arbre sont clos par intersection. En déduire que le problème d'appartenance d'un arbre à un automate d'arbre est dans PTime.

Exercice 5 (Associativité)**.** Soit $\Sigma_2 = \{f\}$ et Σ_0 un ensemble fini de symboles d'arité 0. On note $\mathsf{A}(L)$ la clôture d'un langage L de $T(\Sigma)$ par $f(x, f(y, z)) = f(f(x, y), z)$.

1. Soient $t_1 = f(f(a, \Box), b)$ et $t_2 = f(a, b)$; montrer que $\mathsf{A}(t_1^* t_2)$ n'est pas reconnaissable.
2. Montrer que pour tout L de $T(\Sigma)$, on a $\mathrm{Fr}(L) = \mathrm{Fr}(\mathsf{A}(L))$, où $\mathrm{Fr}(L)$ dénote le langage des feuilles de L.
3. Montrer que pour tous L_1, L_2 de $T(\Sigma)$, $\mathrm{Fr}(L_1) \cap \mathrm{Fr}(L_2) = \mathrm{Fr}(\mathsf{A}(L_1) \cap \mathsf{A}(L_2))$.
4. Montrer que la famille des $\mathsf{A}(L)$ où L est un langage reconnaissable d'arbres n'est pas fermée par intersection.

Exercice 6 (Reconnaissance généralisée)**.** On considère le problème de décision suivant :

instance un terme t de $T(\mathcal{F}, \mathcal{X})$ et un automate d'arbres $\mathcal{A}$

question est-ce qu'il existe une instance close de t acceptée par $\mathcal{A}$?

1. Montrer que si t est un terme linéaire, alors ce problème est dans PTime.
2. Montrer que si t n'est pas linéaire mais $\mathcal{A}$ est déterministe, alors ce problème est NP-complet (on pourra chercher une réduction depuis SAT).

Exercice 7 (Minimisation)**.** Faire l'exercice 1.c) du partiel du 24 mai 2012.