TD 4 : Reconnaissance par morphismes

Exercice 1 (**À préparer** - Langages sans étoile)**.**

1. Sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$, construire les monoïdes syntaxiques des langages suivants : Σ^*, $\Sigma^* a \Sigma^* b \Sigma^*$, $a^* b^*$, $\{w \in \Sigma^* \mid |w|_a \text{ impair}\}$, $((a + cb^*a)c^*b)^*$.
2. Pour chacun de ces langages, justifier s'il est sans étoile ou pas.
3. Pour les langages sans étoile, construire des expressions sans étoile équivalentes, c'est-à-dire en utilisant uniquement des langages finis, l'union, la concaténation, et le complémentaire.
4. Pour les langages sans étoile, construire des formules du premier ordre équivalentes à ces langages.

Exercice 2 (Tiers médian)**.** Soit L un langage donné, on définit $\mathrm{TM}(L)$, le tiers médian de L, par :

$$\mathrm{TM}(L) = \{v \in \Sigma^* \mid \exists u, w \in \Sigma^*, uvw \in L \text{ et } |u| = |v| = |w|\}$$

1. On suppose que L est reconnu par un automate fini $\mathcal{A}$. Construire un automate fini $\mathcal{A}'$ reconnaissant $\mathrm{TM}(L)$.
2. On suppose que L est reconnu par un morphisme $h : \Sigma^* \to M$, où M est un monoïde fini. Construire un monoïde M' et un morphisme $h' : \Sigma^* \to M'$ reconnaissant $\mathrm{TM}(L)$.
3. On suppose que L est reconnaissable. On définit $\mathrm{TM}^{-1}(L)$ comme suit :

$$\mathrm{TM}^{-1}(L) = \{uvw \in \Sigma^* \mid v \in L \text{ et } |u| = |v| = |w|\}$$

$\mathrm{TM}^{-1}(L)$ est-il reconnaissable ? Qu'en est-il si $|\Sigma| = 1$?

Exercice 3 (Congruence à droite)**.** Une relation d'équivalence sur Σ^* est dite *congruence à droite* si pour tous u, v, $w \in \Sigma^*$, $u \equiv v$ implique $uw \equiv vw$. On rappelle qu'elle est dite d'*index fini* si elle possède un nombre fini de classes d'équivalence et que le langage L est dit *saturé* par $\equiv$ si pour tout $u \in \Sigma^*$, pour tout $v \in L$, $u \equiv v$ implique $u \in L$.

1. Montrer que $L \subseteq \Sigma^*$ est reconnaissable si, et seulement si, il est saturé par une congruence à droite d'index fini.
2. On définit $\equiv_L^r$ par $u \equiv_L^r v$ si $\forall y \in \Sigma^*$, $uy \in L \iff vy \in L$. Montrer que $\equiv_L^r$ est la congruence à droite la plus grossière qui sature L.
3. Faire le lien entre $\equiv_L^r$ et l'automate minimal de L.

Exercice 4. (Automate à double sens (Boustrophédon)). Un automate Boustrophédon est un automate fini non déterministe qui, à chaque transition, peut déplacer sa tête de lecture vers la droite ou vers la gauche. De façon équivalente, c'est une machine de Turing à une seule bande qui n'écrit pas sur cette bande.

1. Montrer que tout langage accepté par un automate Boustrophédon est en fait rationnel.
2. Montrer qu'à partir d'un automate Boustrophédon ayant n états, on peut effectivement construire un automate déterministe classique équivalent ayant $2^{O(n^2)}$ états.

Exercice 5. Soit L un langage reconnaissable. Montrer que le langage

$$L' = \{v \in \Sigma^* \mid v^{|v|} \in L\}$$

est aussi reconnaissable.