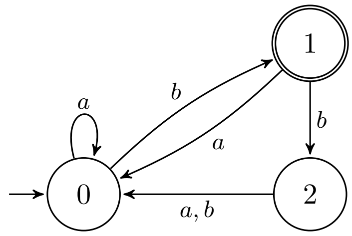
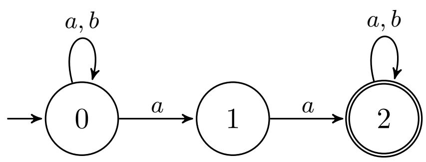
TD 4 : Reconnaissance par morphismes

Exercice 1 (**À préparer** - Monoïdes de transitions)**.**

1. Donner un monoïde fini M et un morphisme φ qui permettent de reconnaître le langage accepté par l'automate suivant :



2. Même question pour l'automate ci-dessous. Attention, l'automate donné n'est pas déterministe. On demande ici de déduire un monoïde de l'automate sans pour autant le déterminiser.



3. En déduire une construction générique d'un monoïde et d'un morphisme reconnaissant le langage d'un automate donné, qu'il soit déterministe ou non.

Exercice 2 (**À préparer** - Reconnaissance par monoïde)**.**

1. En utilisant la représentation par monoïdes, montrer que les langages reconnaissables sont clos par union, intersection et complémentaire.
2. En utilisant la représentation par monoïdes, montrer que les langages reconnaissables sont clos par concaténation. (*Indication : si L_1 et L_2 sont reconnus par $\varphi_1 : \Sigma^* \to M_1$ et $\varphi_2 : \Sigma^* \to M_2$ respectivement, on pourra considérer le morphisme $\psi \colon \Sigma^* \to 2^{M_1 \times M_2}$ défini par $\psi(w) = \{(\varphi_1(u), \varphi_2(v)) \mid w = uv\}$*)
3. En déduire que si un langage est sans étoile, alors il est apériodique.
4. En utilisant la représentation par monoïdes, montrer que les langages reconnaissables sont clos par quotient : si L est reconnaissable et $K \subseteq \Sigma^*$, alors $K^{-1}L$ et LK^{-1} sont reconnaissables.

Exercice 3 (Machine de Turing et automates)**.** Une machine de Turing qui ne modifie pas sa donnée est une MT à une seule bande qui ne peut pas modifier le mot d'entrée, mais qui peut bien sûr écrire sur sa bande en dehors de la zone occupée par le mot d'entrée. La MT peut être non déterministe et ne s'arrête pas forcément.

1. Montrer qu'une MT qui ne modifie pas sa donnée reconnaît en fait un langage rationnel.

2. Étant donnée une MT qui ne modifie pas sa donnée, montrer que l'on peut effectivement calculer la fonction de transition d'un automate fini déterministe équivalent.
3. Peut-on décider le problème du mot pour une MT qui ne modifie pas sa donnée ?

Exercice 4 (Congruence à droite)**.** Une relation d'équivalence sur Σ^* est dite *congruence à droite* si pour tous u, v, $w \in \Sigma^*$, $u \equiv v$ implique $uw \equiv vw$. On rappelle qu'elle est dite d'*index fini* si elle possède un nombre fini de classes d'équivalence et que le langage L est dit *saturé* par $\equiv$ si pour tout $u \in \Sigma^*$, pour tout $v \in L$, $u \equiv v$ implique $u \in L$.

1. Montrer que $L \subseteq \Sigma^*$ est reconnaissable si, et seulement si, il est saturé par une congruence à droite d'index fini.
2. On définit $\equiv_L^r$ par $u \equiv_L^r v$ si $\forall y \in \Sigma^*$, $uy \in L \iff vy \in L$. Montrer que $\equiv_L^r$ est la congruence à droite la plus grossière qui sature L.
3. Faire le lien entre $\equiv_L^r$ et l'automate minimal de L.

Exercice 5 (Langages sans étoile)**.**

1. Sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$, construire les monoïdes syntaxiques des langages suivants : Σ^*, $\Sigma^* a \Sigma^* b \Sigma^*$, $a^* b^*$, $\{w \in \Sigma^* \mid |w|_a \text{ impair}\}$, $((a + cb^*a)c^*b)^*$.
2. Pour chacun de ces langages, justifier s'il est sans étoile ou pas.
3. Pour les langages sans étoile, construire des expressions sans étoile équivalentes, c'est-à-dire en utilisant uniquement des langages finis, l'union, la concaténation, et le complémentaire.
4. Pour les langages sans étoile, construire des formules du premier ordre équivalentes à ces langages.

Exercice 6. Soit L un langage reconnaissable. Montrer que le langage

$$L' = \{v \in \Sigma^* \mid v^{|v|} \in L\}$$

est aussi reconnaissable.