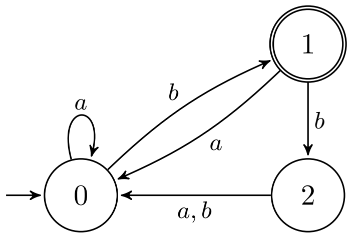
TD 3 : Reconnaissance par morphismes

Exercice 1 (**À préparer** - Langages sans étoile)**.**

1. Sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$, construire les monoïdes syntaxiques des langages suivants : Σ^*, $\Sigma^* a \Sigma^* b \Sigma^*$, $a^* b^*$, $\{w \in \Sigma^* \mid |w|_a \text{ impair}\}$.
2. Pour chacun de ces langages, justifier s'il est sans étoile ou pas.
3. Pour les langages sans étoile, construire des expressions sans étoile équivalentes, c'est-à-dire en utilisant uniquement des langages finis, l'union, la concaténation, et le complémentaire.
4. Pour les langages sans étoile, construire des formules du premier ordre équivalentes à ces langages.

Exercice 2 (**À préparer** - Reconnaissance par monoïde)**.**

1. Donner un monoïde fini M, un morphisme φ et une partie P de M qui permettent de reconnaître le langage accepté par l'automate suivant :



2. En utilisant la représentation par monoïdes, montrer que les langages reconnaissables sont clos par union, intersection et complémentaire.
3. En utilisant la représentation par monoïdes, montrer que les langages reconnaissables sont clos par concaténation. (*Indication : si L_1 et L_2 sont reconnus par $\varphi_1 : \Sigma^* \to M_1$ et $\varphi_2 : \Sigma^* \to M_2$ respectivement, on pourra considérer le morphisme $\psi \colon \Sigma^* \to 2^{M_1 \times M_2}$ défini par $\psi(w) = \{(\varphi_1(u), \varphi_2(v)) \mid w = uv\}$*)
4. En déduire que si un langage est sans étoile, alors il est apériodique.
5. En utilisant la représentation par monoïdes, montrer que les langages reconnaissables sont clos par quotient : si L est reconnaissable et $K \subseteq \Sigma^*$, alors $K^{-1}L$ et LK^{-1} sont reconnaissables.

Exercice 3. (Automate à double sens (Boustrophédon)). Un automate Boustrophédon est un automate fini non déterministe qui, à chaque transition, peut déplacer sa tête de lecture vers la droite ou vers la gauche. De façon équivalente, c'est une machine de Turing à une seule bande qui n'écrit pas sur cette bande.

1. Montrer que tout langage accepté par un automate Boustrophédon est en fait rationnel.

2. Montrer qu'à partir d'un automate Boustrophédon ayant n états, on peut effectivement construire un automate déterministe classique équivalent ayant $2^{O(n^2)}$ états.

Exercice 4 (Congruence à droite)**.** Une relation d'équivalence sur Σ^* est dite *congruence à droite* si pour tous u, v, $w \in \Sigma^*$, $u \equiv v$ implique $uw \equiv vw$. On rappelle qu'elle est dite d'*index fini* si elle possède un nombre fini de classes d'équivalence et que le langage L est dit *saturé* par $\equiv$ si pour tout $u \in \Sigma^*$, pour tout $v \in L$, $u \equiv v$ implique $u \in L$.

1. Montrer que $L \subseteq \Sigma^*$ est reconnaissable si, et seulement si, il est saturé par une congruence à droite d'index fini.
2. On définit $\equiv_L^r$ par $u \equiv_L^r v$ si $\forall y \in \Sigma^*$, $uy \in L \iff vy \in L$. Montrer que $\equiv_L^r$ est la congruence à droite la plus grossière qui sature L.
3. Faire le lien entre $\equiv_L^r$ et l'automate minimal de L.

Exercice 5 (Propriété de sélection)**.** On dit qu'un morphisme $\mu : A^* \to B^*$ a la *propriété de sélection* si pour tout langage rationnel L, il existe un langage rationnel K inclus dans L tel que μ est injectif sur K et $\mu(K) = \mu(L)$. Le but de cet exercice est de montrer que tout morphisme a la propriété de sélection.

1. Montrer que tout morphisme injectif a la propriété de sélection.
2. Montrer que si les morphismes μ et ν ont la propriété de sélection, alors le morphisme $\mu \circ \nu$ a encore la propriété de sélection.

   On appelle *projection* un morphisme $\pi : A^* \to B^*$ tel que pour toute lettre $a \in A$, $\pi(a) = a$ ou $\pi(a) = \varepsilon$.
3. Montrer que pour tout morphisme $\mu : A^* \to B^*$, il existe un alphabet C, un morphisme injectif $\iota : A^* \to C^*$ et une projection $\pi : C^* \to B^*$ tels que $\mu = \pi \circ \iota$.

   On appelle *projection élémentaire* une projection $\pi : A^* \to B^*$ telle qu'il existe une seule lettre $a \in A$ vérifiant $\pi(a) = \varepsilon$.
4. Montrer que toute projection est la composition de projections élémentaires.
5. Montrer que toute projection élémentaire a la propriété de sélection.
6. Conclure.