TD 2 : Minimisation, expressions rationnelles, MSO

Exercice 1. (Algorithme de Brzozowski et McCluskey).

Un automate *généralisé* sur l'alphabet Σ utilise une relation de transition sur $Q \times 2^{\Sigma^*} \times Q$. Une exécution dans un tel automate reconnaît la concaténation des langages des transitions, et le langage reconnu par l'automate est l'union de ces exécutions.

1. Montrer que si $\mathcal{A}$ est un automate généralisé, alors on peut construire un automate généralisé $\mathcal{B}$ équivalent tel qu'il existe exactement une transition entre chaque paire d'états de $\mathcal{B}$.
2. Montrer que si $\mathcal{A} = \langle Q \uplus \{q, i, f\}, \delta, \{i\}, \{f\}\rangle$ est un automate généralisé sur Σ,alors il existe un automate généralisééquivalent avec pour ensemble d'états $Q \uplus \{i, f\}$, c'est-à-dire que l'on peut éliminer q de l'ensemble des états de $\mathcal{A}$.
3. En déduire que si L est reconnu par un automate généralisé $\mathcal{A}$, alors L appartient à la clôture rationnelle des étiquettes des transitions de $\mathcal{A}$.
4. Appliquer cette construction au calcul d'une expression rationnelle équivalente à l'automate suivant :

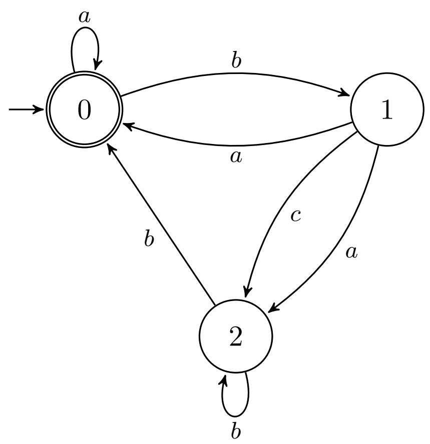


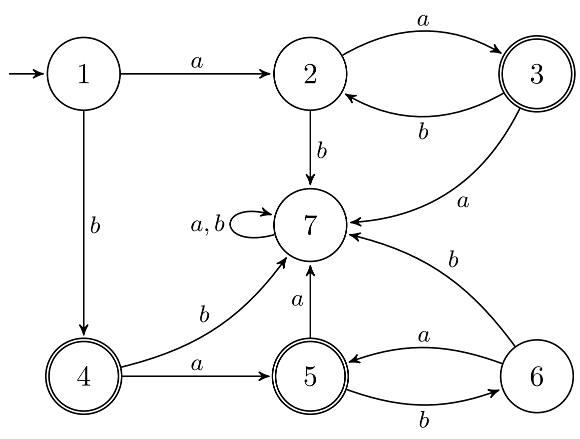
Figure 1 –

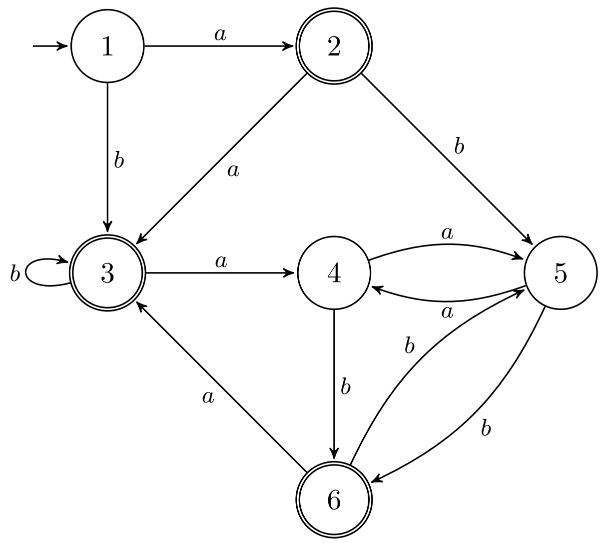
5. On considère l'alphabet $\Sigma_n = \{1, \ldots, n\} \times \{1, \ldots, n\}$ des paires sur $\{1, \ldots, n\}$. Pour une paire (i, f) de Σ_n, on définit

$$L_{i,f} = \{(a_1, a_2)(a_2, a_3), \ldots, (a_m, a_{m+1}) \in \Sigma_n^m \mid m \geq 1, a_1 = i, a_{m+1} = f\}$$

l'ensemble des chemins de i à f dans le graphe complet défini par Σ_n.
(a) Montrer que $L_{i,f}$ est reconnu par un automate fini de taille $O(n^2)$.
(b) Quelle est la taille de l'expression rationnelle que vous obtenez à partir de cet automate ?

Exercice 2. (Minimisations)





Exercice 3. (Langages locaux, algorithme de Glushkov)

1. Une expression rationnelle E sur Σ est *linéaire* si chaque symbole de Σ apparaît au plus une fois dans E.
   Montrer que tout langage rationnel sur Σ est le résultat de l'application d'un morphisme alphabétique $\Delta \to \Sigma$ au langage d'une expression rationnelle linéaire sur Δ.
2. Soit L un langage sur Σ. On définit les ensembles

$$
\begin{aligned}
P(L) &= \{a \in \Sigma \mid a\Sigma^* \cap L \neq \emptyset\} && (1-\text{préfixes})\\
S(L) &= \{a \in \Sigma \mid \Sigma^* a \cap L \neq \emptyset\} && (1-\text{suffixes})\\
F(L) &= \{u \in \Sigma^2 \mid \Sigma^* u \Sigma^* \cap L \neq \emptyset\} && (2-\text{facteurs})\\
N(L) &= \Sigma^2 \setminus F(L) && (2-\text{non facteurs})
\end{aligned}
$$

Soit E une expression rationnelle telle que $L(E) = L$. Donner un algorithme pour calculer $P(L)$, $S(L)$ et $F(L)$ à partir de E.

3. Un langage L sur Σ est *local* si

$$L \setminus \{\epsilon\} = (P(L)\Sigma^* \cap \Sigma^* S(L)) \setminus \Sigma^* N(L)\Sigma^*$$

Un automate fini déterministe est *local* si, pour chaque symbole a de Σ, il y a au plus un état accessible par une transition sur a : $|\{q' \in Q \mid \exists q \in Q, (q, a, q') \in \delta\}| \leq 1$. Il est *standard* si son état initial n'a aucune transition entrante.

Montrer que les trois propositions suivantes sont équivalentes :
(a) L est un langage local.
(b) L est reconnu par un automate local standard.
(c) L est reconnu par un automate local.

4. Les langages locaux sont clos par plusieurs opérations. Montrer que
(a) si L est local, alors L^* est local.
(b) si L_1 et L_2 sont des langages locaux sur des aphabets disjoints, alors $L_1 \cup L_2$ et $L_1 \cdot L_2$ sont des langages locaux.

Montrer qu'une expression linéaire représente un langage local.

5. En déduire un algorithme de contruction d'un automate équivalent à une expression rationnelle. Quelle est la taille de l'automate obtenu ?

6. Appliquer cet algorithme à l'expression rationnelle $(ab + b)^*ba$.

7. Soit $\Sigma_n = \{1, \ldots, n\}$ un alphabet et L l'ensemble des sous-mots de $1 \cdots n$. Donner une expression rationnelle pour L, et construire son automate de Glushkov.

Exercice 4. (Automates $\leftrightarrow$ MSO)

1. Écrire une formule de la logique monadique du second ordre (MSO) pour l'automate suivant de l'exercice 1.

2. Donner des automates équivalents à chacune des formules MSO suivantes :
(a) $(P_a(x) \to (x \in Z \leftrightarrow y \in Z)) \vee (P_b(y) \to (y = x + 2 \wedge P_c(x)))$
(b) $\exists x\, ((P_a(x) \to (x \in Z \leftrightarrow y \in Z)) \vee (P_b(y) \to (y = x + 2 \wedge P_c(x))))$
(c) $\forall x\, ((P_a(x) \to (x \in Z \leftrightarrow y \in Z)) \vee (P_b(y) \to (y = x + 2 \wedge P_c(x))))$

Exercice 5. (MSO et clôture transitive) Soit R une relation sur les mots définissable en MSO, c'est-à-dire telle qu'il existe une formule $\varphi(x_1, x_2)$ de MSO avec deux variables libres x_1 et x_2 vérifiant : toute paire de positions (i, j) d'un mot w appartient à la relation R si, et seulement si, $w, x_1 \mapsto i, x_2 \mapsto j \models \varphi(x_1, x_2)$.

1. Écrire une formule de MSO pour la relation R_1 définie par : si la lettre courante est un a, sauter deux positions à droite ; si la lettre courante est un b, sauter une position à gauche ; si la lettre courante est un c, sauter trois positions à droite. Autrement dit, pour un mot w fixé, $R_1 = \{(i, j) \mid w_i = a \text{ et } j = i + 2\} \cup \{(i, j) \mid w_i = b \text{ et } j = i + 1\} \cup \{(i, j) \mid w_i = c \text{ et } j = i + 3\}$.

2. Écrire une formule de MSO pour la relation R_2 définie par : si la lettre courante est un a, sauter soit deux positions à gauche, soit une position à droite ; si la lettre courante est un b, sauter soit une position à gauche, soit trois positions à droite. Autrement dit, pour un mot w fixé, $R_2 = \{(i,j) \mid w_i = a \text{ et } j = i-2 \text{ ou } j = i+1\} \cup \{(i,j) \mid w_i = b \text{ et } j = i-1 \text{ ou } j = i+3\}$.
3. Écrire une formule de MSO $\psi_1(x_3, x_4)$ avec deux variables libres x_3 et x_4 qui définit une relation binaire R_1^* qui est la clôture réflexive et transitive de R_1.
4. Plus généralement, construire une formule de MSO définissant la clôture réflexive et transitive d'une relation définie en MSO.
5. Pour une relation R définissable en MSO, écrire une formule de MSO sans variable libre telle que la formule s'évalue à vrai sur un mot si, et seulement si, la paire donnée par la première position et la dernière position du mot appartient à la clôture réflexive et transitive de R.

Exercice 6. (Minimisation par renversement)
Montrer que l'automate déterminisé d'un automate co-déterministe et co-accessible est minimal. Quelle est la complexité de cette méthode de minimisation ?

Exercice 7. (Automate à double sens (Boustrophédon)). Un automate Boustrophédon est un automate fini non déterministe qui, à chaque transition, peut déplacer sa tête de lecture vers la droite ou vers la gauche. De façon équivalente, c'est une machine de Turing à une seule bande qui n'écrit pas sur cette bande.

1. Montrer que tout langage accepté par un automate Boustrophédon est en fait rationnel.
2. Montrer qu'à partir d'un automate Boustrophédon ayant n états, on peut effectivement construire un automate déterministe classique équivalent ayant $2^{O(n^2)}$ états.