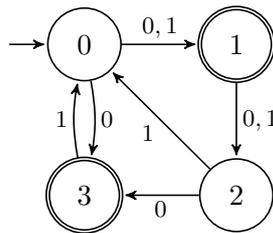


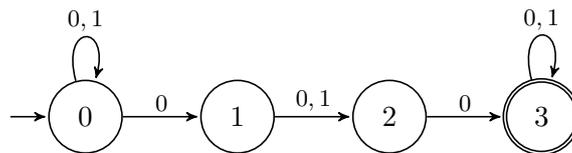
## TD 1 : Automates finis

### Exercice 1 (Déterminisation).

1. Donner un automate fini déterministe équivalent à l'automate suivant :



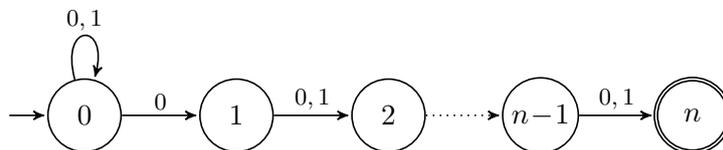
2. Donner un automate fini déterministe équivalent à l'automate suivant :



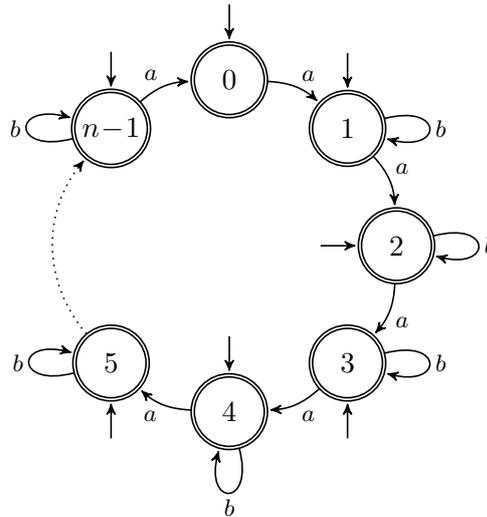
3. Montrer que l'automate des parties déterministe obtenu à partir de l'automate suivant a  $2^n$  états. On pourra utiliser l'ensemble suivant :

$$P-1 = \{i-1 \mid i \neq 1 \in P\}$$

où  $P$  est un sous-ensemble de  $\{1, \dots, n\}$ .



4. Quelle est la taille de l'automate des parties pour l'automate suivant ?



**Exercice 2** (Construction d'automates). On note  $\Sigma = \{0, 1\}$ .

1. Donner un automate qui reconnaît le langage des multiples de 3 en base 2 où la représentation des entiers est « big-endian » (i.e. les bits sont rangés du plus fort au plus faible).
2. Donner un automate déterministe qui reconnaît les mots de  $\Sigma^*$  qui représentent les entiers non divisibles par 3 en notation « little-endian ».
3. Donner un automate qui reconnaît les langages :
  - (a)  $L_1 = \{u \in \Sigma^* : \text{toute occurrence de } 1 \text{ est suivie de deux occurrences de } a\}$
  - (b)  $L_2 = \{u \in \Sigma^* : u \text{ ne contient pas deux occurrences de } 0 \text{ successives}\}$
  - (c)  $L_3 = \{u \in \Sigma^* : \text{le nombre d'occurrence de } 1 \text{ est pair}\}$

**Exercice 3** (Reconnaissance de Langage). On se place sur l'alphabet  $\Sigma = \{a, b\}$ . Dire si les langages suivants sont reconnaissables :  $L = \{|u|_a = |u|_b\}$ ,  $L = \{a^p b^q : p \geq q\}$ ,  $L = \{a^p b^q : p \geq q \text{ et } q \leq 2012\}$ ,  $L = \{|u|_a \neq |u|_b\}$ ,  $L = \{a^p b^q : p \neq q\}$ ,  $L = \{|u|_a = 2^{|u|_b}\}$ ,  $L = \{ww : w \in \{a, b\}^*\}$ ,  $L = \{a^{2^n} : n \in \mathbb{N}\}$ .

**Exercice 4** (Application du lemme d'itération). On se place sur l'alphabet  $\Sigma = \{a, b\}$ . On pose  $L_0 = \{uvw : u, w \in \Sigma^* \text{ et } v \in \{aaa, bbb\}\}$ , et  $L_1 = \{(aab)^n (abb)^n : n \in \mathbb{N}\}$ .

1. Donner un automate fini déterministe qui reconnaît  $L_0$ .
2. Donner une expression régulière représentant  $L_0$ .
3. Quelle condition (sur la longueur) satisfont les mots de  $L_1$  ?
4. Quels facteurs de longueur 3 sont impossibles dans un mot de  $L_1$  ? Que pouvez-vous en déduire pour  $L_0$  et  $L_1$  ?

5. Dire si le langage  $L_1$  est reconnaissable.
6. Dire si le langage  $L_0 \cup L_1$  est reconnaissable.

**Exercice 5** (Dérivées partielles, automate d'ANTIMIROV). La *dérivée partielle*  $\partial_a(E)$  d'une expression rationnelle  $E$  sur  $\Sigma$  par une lettre  $a$  de  $\Sigma$  est l'ensemble d'expressions rationnelles sur  $\Sigma$  défini par

$$\begin{aligned} \partial_a(\emptyset) &= \emptyset \\ \partial_a(\varepsilon) &= \emptyset \\ \partial_a(b) &= \begin{cases} \{\varepsilon\} & \text{si } a = b \\ \emptyset & \text{sinon} \end{cases} \\ \partial_a(E + F) &= \partial_a(E) \cup \partial_a(F) \\ \partial_a(E^*) &= \partial_a(E) \cdot E^* \\ \partial_a(EF) &= \begin{cases} \partial_a(E) \cdot F & \text{si } \varepsilon \notin \mathcal{L}(E) \\ \partial_a(E) \cdot F \cup \partial_a(F) & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

où l'opération de concaténation est étendue de manière évidente aux ensembles d'expressions rationnelles.

On étend cette définition à des mots  $w$  de  $\Sigma^*$  et des ensembles d'expressions rationnelles  $S$  par

$$\begin{aligned} \partial_\varepsilon(E) &= \{E\} \\ \partial_{wa}(E) &= \partial_a(\partial_w(E)) \\ \partial_w(S) &= \bigcup_{E \in S} \partial_w(E). \end{aligned}$$

1. Calculer les dérivées partielles de  $(ab + b)^*ba$  par  $a$  et  $b$ .
2. Montrer que pour toute expression rationnelle  $E$  sur  $\Sigma$  et tout mot  $w$  de  $\Sigma^*$ ,  $\mathcal{L}(\partial_w(E)) = w^{-1}\mathcal{L}(E)$ .
3. Utiliser les dérivées partielles pour construire un automate (que l'on montrera fini plus tard) équivalent à une expression rationnelle.
4. On note l'ensemble des suffixes propres d'un mot  $w$  par

$$\text{Suf}(w) = \{v \in \Sigma^+ \mid \exists u \in \Sigma^*, w = uv\}.$$

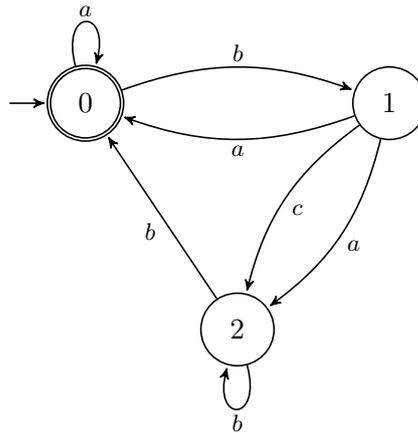
Montrer les égalités et inégalités suivantes pour tout mot  $w$  de  $\Sigma^*$  et expressions  $E$  et  $F$  sur  $\Sigma$  :

$$\begin{aligned} \partial_w(E + F) &= \partial_w(E) \cup \partial_w(F) \\ \partial_w(EF) &\subseteq \partial_w(E) \cdot F \cup \bigcup_{v \in \text{Suf}(w)} \partial_v(F) \\ \partial_w(E^*) &\subseteq \bigcup_{v \in \text{Suf}(w)} \partial_v(E) \cdot E^* \end{aligned}$$

5. Soit  $\|E\|$  le nombre d'occurrences de lettres de  $\Sigma$  dans l'expression  $E$ . Montrer que l'ensemble des dérivées partielles différentes de  $E$  contient au plus  $\|E\| + 1$  éléments.

**Exercice 6** (Algorithme de BRZOZOWSKI ET MCCLUSKEY). Un automate *généralisé* sur l'alphabet  $\Sigma$  utilise une relation de transition sur  $Q \times 2^{\Sigma^*} \times Q$ . Une exécution dans un tel automate reconnaît la concaténation des langages des transitions, et le langage reconnu par l'automate est l'union de ces exécutions.

1. Montrer que si  $\mathcal{A}$  est un automate généralisé, alors on peut construire un automate généralisé  $\mathcal{B}$  équivalent tel qu'il existe exactement une transition entre chaque paire d'états de  $\mathcal{B}$ .
2. Montrer que si  $\mathcal{A} = \langle Q \uplus \{q, i, f\}, \delta, \{i\}, \{f\} \rangle$  est un automate généralisé sur  $\Sigma$ , alors il existe un automate généralisé équivalent avec pour ensemble d'états  $Q \uplus \{i, f\}$ , c'est-à-dire que l'on peut éliminer  $q$  de l'ensemble des états de  $\mathcal{A}$ .
3. En déduire que si  $L$  est reconnu par un automate généralisé  $\mathcal{A}$ , alors  $L$  appartient à la clôture rationnelle des étiquettes des transitions de  $\mathcal{A}$ .
4. Appliquer cette construction au calcul d'une expression rationnelle équivalente à l'automate suivant :



5. On considère l'alphabet  $\Sigma_n = \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, n\}$  des paires sur  $\{1, \dots, n\}$ . Pour une paire  $(i, f)$  de  $\Sigma_n$ , on définit

$$L_{i,f} = \{(a_1, a_2)(a_2, a_3), \dots, (a_m, a_{m+1}) \in \Sigma_n^m \mid m \geq 1, a_1 = i, a_{m+1} = f\}$$

l'ensemble des chemins de  $i$  à  $f$  dans le graphe complet défini par  $\Sigma_n$ .

- (a) Montrer que  $L_{i,f}$  est reconnu par un automate fini de taille  $O(n^2)$ .
- (b) Quelle est la taille de l'expression rationnelle que vous obtenez à partir de cet automate ?