TD 6 : Grammaires LL(k)

Exercice 1 (Motifs Objective Caml)**.** Voici un extrait de la syntaxe des motifs d'Objective Caml, sur l'alphabet terminal $\Sigma = \{\texttt{VN}, \_, ::, \texttt{as}, [,], ;\}$ et l'ensemble de variables $V = \{\langle pat\rangle, \langle patl\rangle\}$:

$$\begin{aligned}\langle pat\rangle &\to \texttt{VN} \mid \_ \mid \langle pat\rangle :: \langle pat\rangle \mid \langle pat\rangle \ \texttt{as VN} \mid [\ \langle patl\rangle\ ]\\ \langle patl\rangle &\to \langle pat\rangle \mid \langle patl\rangle \ ;\ \langle pat\rangle\end{aligned}$$

Cette grammaire permet de générer des motifs tels que `[a; _; b] :: t as l`

1. Donner une grammaire fortement LL(1) équivalente à ce fragment.
2. Préciser les ensembles First_1 et Follow_1 calculés.
3. Écrire un analyseur récursif descendant dans votre langage favori pour votre grammaire.

Exercice 2 (Récursivité gauche, ambiguïté)**.**

1. Montrer qu'une grammaire algébrique est LL(k) si et seulement si, pour toutes dérivations gauches $S \xrightarrow{*}_g ux\delta \to_g u\alpha_1\delta \xrightarrow{*}_g uv_1$ et $S \xrightarrow{*}_g ux\delta \to_g u\alpha_2\delta \xrightarrow{*}_g uv_2$ avec $\text{First}_k(v_1) = \text{First}_k(v_2)$, nécessairement $\alpha_1 = \alpha_2$.
2. Montrer que si une grammaire est ambiguë, alors elle n'est LL(k) pour aucun k.
3. Une variable $x \in V$ est *récursive gauche* s'il existe une dérivation $x \xrightarrow{+} x\alpha$ avec α dans $(V \uplus \Sigma)^*$. Une grammaire réduite est récursive gauche s'il existe au moins une variable x recursive gauche.

   Montrer que si une grammaire réduite est récursive gauche, alors elle n'est LL(k) pour aucun k.

Exercice 3 (Langages fortement LL(k))**.**

1. Montrer qu'une grammaire algébrique est fortement LL(k) si et seulement si, pour toutes dérivations gauches $S \xrightarrow{*}_g u_1x\delta_1 \to_g u_1\alpha_1\delta_1 \xrightarrow{*}_g u_1v_1$ et $S \xrightarrow{*}_g u_2x\delta_2 \to_g u_2\alpha_2\delta_2 \xrightarrow{*}_g u_2v_2$ avec $\text{First}_k(v_1) = \text{First}_k(v_2)$, nécessairement $\alpha_1 = \alpha_2$.
2. Montrer qu'une grammaire est LL(1) si et seulement si elle est fortement LL(1).
3. Montrer que la grammaire suivante est LL(2) mais n'est fortement LL(k) pour aucun k :

$$\begin{aligned}S &\to aAab \mid bAb\\ A &\to cAB \mid \varepsilon \mid a\\ B &\to \varepsilon\end{aligned}$$

4. Montrer que si une grammaire est LL(k), alors il existe une grammaire fortement LL(k) équivalente, qui utilise des variables de la forme (x, F) où $F \subseteq \mathrm{Follow}_k(x)$.
5. Appliquer cette construction à la grammaire précédente.

Exercice 4 (Calcul efficace de First_1 et Follow_1)**.** On appelle *expression relationnelle* un terme décrit par la syntaxe abstraite

$$e ::= r \mid e^* \mid e^{-1} \mid e \cdot e \mid e \cup e$$

où r est une relation "atomique". Une expression relationnelle définit une relation $R(e)$. La *taille* $|e|$ d'une expression relationnelle e est la somme des tailles des relations atomiques qui la composent. Pour une expression relationnelle e de taille finie, on peut calculer une image par sa relation $R(e)$ en temps $O(|e|)$. On souhaite calculer les ensembles First_1 et Follow_1 d'une grammaire G à l'aide d'expressions relationnelles de taille $O(|G|)$, de manière à obtenir des algorithmes en temps linéaire $O(|G|)$.

1. Proposer une expression relationnelle $\mathsf{emptyword}$ sur $V \times \{\varepsilon\}$ de taille $O(|G|)$ telle que
$$R(\mathsf{emptyword})(x) = \{\varepsilon \mid x \xrightarrow{*} \varepsilon\} \ .$$
2. Proposer une expression relationnelle first sur $V \times (\Sigma \uplus \{\varepsilon\})$ de taille $O(|G|)$ telle que
$$R(\mathsf{first})(x) = \mathrm{First}_1(x) \ .$$
3. Proposer une expression relationnelle end sur $V \times \{\varepsilon\}$ de taille $O(|G|)$ telle que
$$R(\mathsf{end})(x) = \{\varepsilon \mid \exists \delta \in (V \uplus \Sigma)^*,\ S \xrightarrow{*} \delta x\} \ .$$
4. Proposer une expression relationnelle follow sur $V \times (\Sigma \uplus \{\varepsilon\})$ telle que
$$R(\mathsf{follow})(x) = \mathrm{Follow}_1(x) \ .$$

   Au moins dans un premier temps, on pourra se contenter d'une expression de taille $O(|G|^2)$.