Langages Formels

Exercice 1 (Forme normale de Greibach)
Soit $G = (\Sigma, V, P, S)$ une grammaire algébrique, avec $V = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Pour tous $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, on pose

$$\begin{aligned} \alpha_{i,j} &= \{u \in (\Sigma \cup V)^* \mid x_j \to x_i u \in P\}\,, \quad \text{et} \\ \beta_j &= \{u \in \Sigma \cdot (\Sigma \cup V)^* \cup \{\epsilon\} \mid x_j \to u \in P\}\,, \end{aligned}$$

de telle sorte que les règles issues de x_j sont

$$x_j \to \sum_{1 \le i \le n} x_i \alpha_{i,j} + \beta_j$$

où $\alpha_{i,j}$ et β_j sont des ensembles finis de mots. On décrit aussi G vectoriellement par

$$X \to XA + B$$

où $X = (x_1, \ldots, x_n)$, A est la matrice $(\alpha_{i,j})_{1 \le i,j \le n}$, et $B = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$.

1. On définit une grammaire $G' = (\Sigma, V', P', S)$ sur l'ensemble de non terminaux $V' = V \uplus \{y_{i,j} \mid 1 \le i, j \le n\}$, et avec les règles

   $$\begin{aligned} X &\to BY + B \\ Y &\to AY + A\,, \end{aligned}$$

   où Y est la matrice $(y_{i,j})_{1 \le i,j \le n}$, i.e. :

   $$x_j \to \sum_{1 \le k \le n} \beta_k y_{k,j} + \beta_j \qquad \text{et} \qquad y_{i,j} \to \sum_{1 \le k \le n} \alpha_{i,k} y_{k,j} + \alpha_{i,j}\,.$$

   Montrer que pour tout $x \in V$, $L_G(x) = L_{G'}(x)$.
2. Montrer qu'à partir d'une grammaire algébrique propre, on peut construire une grammaire équivalente en forme normale de Greibach quadratique, i.e., telle que $P \subseteq V \times (\Sigma \cup \Sigma V \cup \Sigma V^2)$.

   On pourra partir d'une grammaire en forme normale de Chomsky, i.e., telle que $P \subseteq (V \times (V^2 \cup \Sigma))$.

Exercice 2 (Indécidabilité)
Montrer que pour deux langages algébriques L et L', les problèmes suivants sont indécidables :

1. L est-il rationnel ?
2. $L \cap L'$ est-il aglébrique ?
3. $\overline{L}$ est-il algébrique ?

Exercice 3 (Problème du vide)
Montrer que le problème du vide d'une grammaire algébrique est PTIME-dur, par réduction de Horn-SAT.

Exercice 4 (Analyse syntaxique descendante)
Construire une 1-table d'analyse déterministe et complète pour la grammaire usuelle du langage de Dyck D_n^* sur n paires de parenthèses :

$$S \to \varepsilon \mid a_1 S b_1 S \mid \cdots \mid a_n S b_n S\,.$$

Exercice 5 (Récursivité gauche)
Montrer que l'algorithme d'analyse descendante générique donné en cours termine si et seulement si la grammaire G n'est pas récursive à gauche ($x \overset{+}{\not\Rightarrow} x\alpha$).