Langages Formels

Exercice 1 (Grammaires)
Montrer que les langages suivants sont algébriques :

1. $\{ u\widetilde{u} \ : \ u \in \{a,b\}^* \}$ où $\widetilde{u}$ est l'image miroir
2. $\{ a^n b^m \ : \ n \neq m, \ n,m \in \mathbb{N} \}$
3. $\{ a^n b^p c^q \ : \ n,q \geq 0, \ p \geq n+q \}$
4. $\{ a^n b^p \ : \ 0 \leq n, \ n \leq p \leq 2n \}$

Exercice 2 (Langages de Dyck)
Soit $\Sigma_n = \{ a_i \ : \ 1 \leq i \leq n \} \cup \{ \overline{a}_i \ : \ 1 \leq i \leq n \}$ un alphabet vu comme n paires de parenthèses. Soit $G_n = (\Sigma_n, V, P_n, S)$ la grammaire définie par $S \to a_1 S \overline{a}_1 S + \ldots + a_n S \overline{a}_n S + \epsilon$. Le langage $D_n^* = \mathcal{L}_{G_n}(S)$ est appelé langage de Dyck sur n paires de parenthèses.

1. Montrer que
$$D_1^* = \{ w \in \Sigma_1^* \ : \ |w|_{a_1} = |w|_{\overline{a}_1} \text{ et } |v|_{a_1} \geq |v|_{\overline{a}_1} \text{ pour tout } v \leq w \}.$$
2. On considère le système de réécriture (de type 0) $R_n = (\Sigma_n, P'_n)$ dont les règles sont $\{ (a_i \overline{a}_i, \epsilon) \ : \ 1 \leq i \leq n \}$. Montrer que
$$D_n^* = \{ w \in \Sigma_n^* \ : \ w \to_{R_n}^* \epsilon \}.$$

Exercice 3 (Propriétés de fermeture)
Montrer que la famille des langages algébriques est fermée par :

1. concaténation et itération ;
2. substitution algébrique [1].

Montrer que les familles des langages algébriques et des langages linéaires sont fermées par :

1. Une substitution $\sigma : \Sigma \to 2^{\Sigma'^*}$ tel que pour tout $a \in \Sigma$, $\sigma(a)$ est algébrique.

3. union et image miroir ;
4. intersection avec un langage rationnel ;
5. morphisme ;
6. projection inverse [2] ;
7. morphisme inverse.

Exercice 4 (Sinon quoi ?)
On considère la grammaire suivante :

$$\begin{array}{lcl} S & \rightarrow & \mathsf{if}\ c\ \mathsf{then}\ S\ \mathsf{else}\ S \\ S & \rightarrow & \mathsf{if}\ c\ \mathsf{then}\ S \\ S & \rightarrow & a \end{array}$$

Montrer qu'elle est ambigue mais que le langage engendré ne l'est pas.

Exercice 5 (Langages rationnels et grammaires linéaires)
Montrer qu'un langage est rationnel ssi il peut être engendré par une grammaire linéaire gauche.

2. Une projection est un morphisme $p : \Sigma^* \rightarrow \Delta^*$ tel que pour tout $a \in \Sigma$, $|p(a)| \leq 1$.