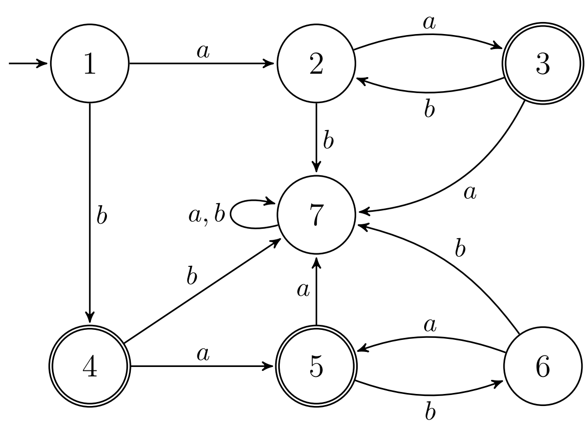
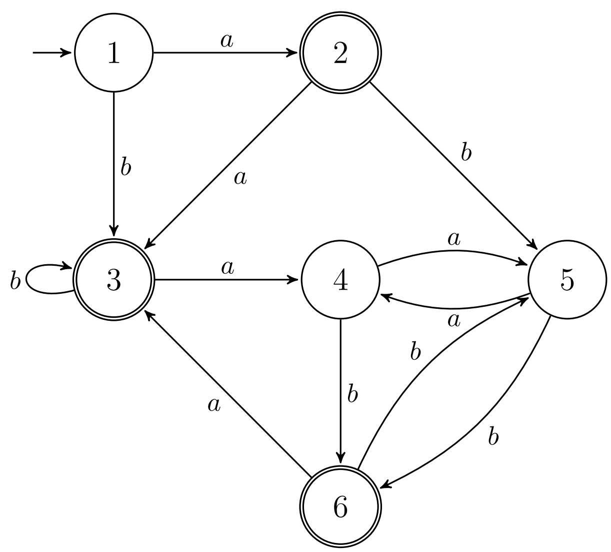
TD2 31 janvier 2019

Langages Formels

Exercice 1 (Minimisation)
Minimiser les deux automates suivants, en utilisant l'algorithme de Moore :





Exercice 2 (Automate minimal d'une expression)
Donner un automate minimal pour $((a(a+b)^2+b)^*a(a+b))^*$.

Exercice 3 (Minimisation par renversement de Brzozowski)
Montrer que le déterminisé d'un automate co-déterministe co-accessible qui reconnaît L est (isomorphe à) l'automate minimal de L. En déduire un algorithme pour minimiser un automate. Quelle est la complexité de cette méthode ?

Exercice 4 (Complexité en états d'un langage)
Étant donné un langage reconnaissable L on peut définir sa complexité en états $\mathsf{Sc}(L)$ comme le nombre d'états de son automate minimal. Montrer les inégalités suivantes (L^{t} est le transposé de L, langage des images miroirs des mots de L) :

1. $\mathsf{Sc}(L \cup K) \leq \mathsf{Sc}(L)\mathsf{Sc}(K)$;
2. $\mathsf{Sc}(L \cap K) \leq \mathsf{Sc}(L)\mathsf{Sc}(K)$;
3. $\mathsf{Sc}(L^{\mathsf{t}}) \leq 2^{\mathsf{Sc}(L)}$;
4. $\mathsf{Sc}(LK) \leq (2\mathsf{Sc}(L) - 1)2^{\mathsf{Sc}(K)-1}$.

Exercice 5 (Critère de reconnaissabilité)
On veut montrer que la version "ssi" de la troisième formulation du lemme de l'étoile est une caractérisation des langages réguliers. On dit qu'un langage L satisfait P_N si pour tout $uv_1 \ldots v_N w$ avec $|v_i| \geq 1$ il existe $0 \leq j < k \leq N$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$uv_1 \ldots v_N w \in L \Leftrightarrow uv_1 \ldots v_j (v_{j+1} \ldots v_k)^n v_{k+1} \ldots v_N w \in L.$$

Le théorème de Ehrenfeucht, Parikh & Rozenberg affirme que L est régulier ssi il existe un entier N tel que L satisfait P_N.

1. Montrer que si L appartient à P_N alors $v^{-1}L$ aussi, pour tout $v \in \Sigma^*$.
2. Démontrer le théorème, en supposant qu'il n'y a qu'un nombre fini de langages satisfaisant P_N pour un N fixé.
3. On rappelle le théorème de Ramsey, spécialisé pour nos besoins : pour tout N il existe R tel que, pour tout ensemble E de cardinal au moins R et pour toute partition $\mathcal{P}$ de $\mathfrak{P}_2(E) = \{ \{e, e'\} \ : \ e, e' \in E, \ e \neq e' \}$ en deux classes, il existe un sous-ensemble $F \subseteq E$ de cardinal $N + 1$ tel que $\mathfrak{P}_2(F)$ est tout entier contenu dans une seule classe de $\mathcal{P}$.

   Soient L et L' deux langages satisfaisant P_N et coïncidant sur les mots de longueur inférieure $R - 1$. Montrer qu'ils coïncident aussi sur les mots de longueur $M \geq R - 1$, par induction sur M. On pourra considérer, pour un $f = a_1 \dots a_{R-1} t$ de longueur M (avec $a_i \in \Sigma$) la partition suivante de $\mathfrak{P}_2(\{0, 1, \dots, R-1\})$:

$$X_f = \{\ (j,k)\ :\ 0 \leq j < k \leq R-1,\ a_1 \dots a_j a_{k+1} \dots a_{R-1} t \in L\ \}$$
$$Y_f = \mathfrak{P}_2(\{0, 1, \dots, R-1\}) \setminus X_f$$

4. Conclure.