TD6 7 mars 2018

Langages Formels

Exercice 1 — Constructions d'automates
Donner des automates à pile reconnaissant les langages suivants :

1. $L_1 = \{\ w \in \Sigma^* \ :\ |w|_a = |w|_b\ \}$
2. $L_2 = \{\ a^n b^n \ :\ n \geq 0\ \} \cup \{\ a^n b^{2n} \ :\ n \geq 0\ \}$
3. $L_3 = \overline{L}$, où $L = \{\ w\widetilde{w} \ :\ w \in \Sigma^*\ \}$
4. $L_4 = \overline{L'}$, où $L' = \{\ ww \ :\ w \in \Sigma^*\ \}$

Exercice 2 — Push-pop
Soit $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, z_0, F)$ un automate à pile. Construire un automate équivalent $\mathcal{A}' = (Q', \Sigma, \Gamma', \delta', q_0', z_0', F')$ dont toutes les transitions $t \in \delta'$ soient de type push ou pop, avec :

— t est de type push si elle est de la forme (q, z, a, q', zz') : une seule lettre est rajoutée sur la pile ;
— t est de type pop si elle est de la forme $(q, z, a, q', \varepsilon)$: une lettre est effacée de la pile.

Exercice 3 — Acceptation généralisée
Soit $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, z_0)$ un automate à pile, et $K \subseteq \Gamma^* Q$ un langage régulier. On définit

$$L_K(\mathcal{A}) = \{\ w \in \Sigma^* \ :\ \exists \gamma q \in K.\, q_0, z_0 \xrightarrow{w} q, \gamma\ \}$$

On retrouve les conditions d'acceptations classiques :

— par état final en posant $K = \Gamma^* F$.
— par pile vide en posant $K = Q$.

1. Montrer que l'on peut construire un automate à pile $\mathcal{A}'$ acceptant par état final tel que $L_K(\mathcal{A}) = L(\mathcal{A}')$.
2. Peut-on faire en sorte que, si $\mathcal{A}$ est déterministe, alors $\mathcal{A}'$ le soit aussi ?

Exercice 4 — Mots de pile
Soit $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, z_0, F)$ un automate à pile, et $(p, \gamma) \in Q \times \Gamma^*$. Le langage des mots de pile engendrés par (p, γ) est :

$$\mathcal{C}(p, \gamma) = \{\ (q, \gamma') \in Q \times \Gamma^* \ :\ p, \gamma \to^+ q, \gamma'\ \}$$

On veut montrer que $\mathcal{C}(p, \gamma)$ est régulier. On considère l'alphabet $\Omega = Q \uplus \Gamma \uplus \overline{Q} \uplus \overline{\Gamma}$, et la relation de simplification suivante sur les mots de Ω^* :

$$uq\bar{q}v \rightsquigarrow uv \qquad uz\bar{z}v \rightsquigarrow uv$$

Pour $L \subseteq \Omega^*$, on pose $\mathsf{Clot}(L) = \{\ v\ :\ u \rightsquigarrow^* v \text{ pour un } u \in L\ \}$.

1. Montrer que, si L est régulier, alors $\mathsf{Clot}(L)$ aussi.
2. Soit $K = \{\ \bar{p}\bar{z}\gamma q\ :\ \exists a.\, (p, z, a, q, \gamma) \in \delta\ \}$. Montrer que $q, \gamma \to^n q', \gamma'$ ssi il existe $w \in K^n$ tel que $\gamma q w \rightsquigarrow^{2n} \gamma' q'$.
3. Conclure.

Exercice 5 — Calculs d'accessibilité
Montrer que l'on peut calculer les ensembles suivants sur un automate à pile :

1. $X = \{\ (p, z, q) \in Q \times \Gamma \times Q\ :\ p, z \to^+ q, \varepsilon\ \}$
   On exprimera X comme un plus petit point fixe.
2. $Y = \{\ (p, z) \in Q \times \Gamma\ :\ p, z \to^\omega\ \}$ où $\to^\omega$ est la réduction infinie.
   On exprimera Y comme un plus grand point fixe.