TD3 7 février 2018

Langages Formels

Exercice 1 (Congruence de Nérode)
Soit $\mathcal{A} = \langle \Sigma, Q, q_0, F, \delta \rangle$ un automate déterministe complet, et $\sim$ une relation d'équivalence sur Q. Cette relation est une *congruence* si elle est compatible avec les transitions de $\mathcal{A}$:

$$q \sim q' \text{ implique } \forall a \in \Sigma,\ \delta(q,a) \sim \delta(q',a) \tag{1}$$

et si elle sature F :

$$q \sim q' \text{ implique } q \in F \text{ ssi } q' \in F \tag{2}$$

pour tous états $q, q' \in Q$.

L'*automate quotient* de $\mathcal{A}$ par une relation d'équivalence $\sim$ est l'automate $\mathcal{A}/\!\sim\, = \langle \Sigma, Q/\!\sim, [q_0], \{[q_f] \mid q_f \in F\}, \delta/\!\sim \rangle$, où $[q]$ est la classe d'équivalence de l'état q, et

$$\delta/\!\sim\, = \{([q], a, [\delta(q,a)]) \mid q \in Q, a \in \Sigma\}\,.$$

1. Soit $\mathcal{A} = \langle \Sigma, Q, q_0, F, \delta \rangle$ un automate déterministe complet et $\sim$ une congruence sur Q. Montrer que l'automate quotient $\mathcal{A}/\!\sim$ est déterministe complet et reconnaît $L(\mathcal{A})$.
2. Pour tout $q \in Q$, on note $L_q = L(\langle \Sigma, Q, q, F, \delta \rangle)$. Montrer que la relation d'équivalence $\cong$ définie par

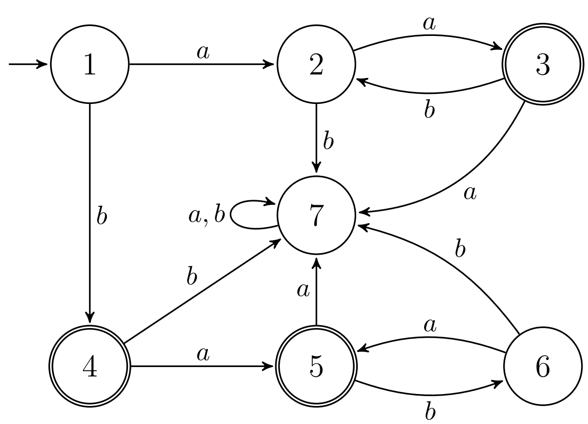
   $$q \cong q' \text{ ssi } L_q = L_{q'}$$

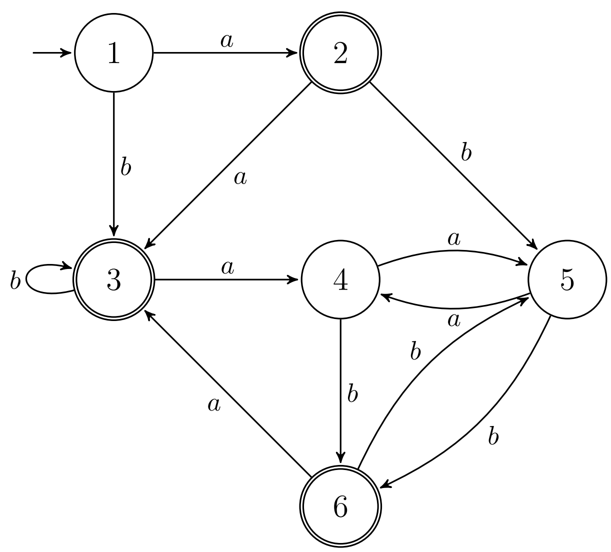
   est bien congruence. On l'appelle la *congruence de Nérode.*
3. Montrer que si $\mathcal{A}$ est accessible, $\mathcal{A}/\!\cong$ est isomorphe à l'automate des résiduels de $L(\mathcal{A})$.
4. (Algorithme de Moore.) Pour tout $i \geq 0$, on définit une relation d'équivalence $\cong_i$ sur Q par

   $$q \cong_0 q' \text{ ssi } (q \in F \iff q' \in F)$$
   $$q \cong_{i+1} q' \text{ ssi } q \cong_i q' \text{ et } \forall a \in \Sigma,\ \delta(q,a) \cong_i \delta(q',a)\,.$$

   Montrer qu'il existe k tel que $\cong_k = \cong_{k+j}$ pour tout $j \geq 0$, et tel que $\cong_k = \cong$.

Exercice 2 (Minimisation)
Minimiser les deux automates suivants, en utilisant l'algorithme de Moore :





Exercice 3 (Automate minimal d'une expression)
Donner un automate minimal pour $((a(a+b)^2+b)^*a(a+b))^*$.

Exercice 4 (Minimisation par renversement de Brzozowski)
Montrer que le déterminisé d'un automate co-déterministe co-accessible qui reconnaît L est (isomorphe à) l'automate minimal de L. En déduire un algorithme pour minimiser un automate. Quelle est la complexité de cette méthode ?

Exercice 5 (Complexité en états d'un langage)
Étant donné un langage reconnaissable L on peut définir sa complexité en états $\mathsf{Sc}(L)$ comme le nombre d'états de son automate minimal. Montrer les inégalités suivantes (L^{t} est le transposé de L, langage des images miroirs des mots de L) :

1. $\mathsf{Sc}(L \cup K) \leq \mathsf{Sc}(L)\mathsf{Sc}(K)$;
2. $\mathsf{Sc}(L \cap K) \leq \mathsf{Sc}(L)\mathsf{Sc}(K)$;
3. $\mathsf{Sc}(L^{\mathsf{t}}) \leq 2^{\mathsf{Sc}(L)}$;
4. $\mathsf{Sc}(LK) \leq (2\mathsf{Sc}(L) - 1)2^{\mathsf{Sc}(K)-1}$.

Exercice 6 (Critère de reconnaissabilité)
On veut montrer que la version "ssi" de la troisième formulation du lemme de l'étoile est une caractérisation des langages réguliers. On dit qu'un langage L satisfait P_N si pour tout $uv_1 \dots v_N w$ avec $|v_i| \geq 1$ il existe $0 \leq j < k \leq N$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$uv_1 \dots v_N w \in L \Leftrightarrow uv_1 \dots v_j (v_{j+1} \dots v_k)^n v_{k+1} \dots v_N w \in L.$$

Le théorème de Ehrenfeucht, Parikh & Rozenberg affirme que L est régulier ssi il existe un entier N tel que L satisfait P_N.

1. Montrer que si L appartient à P_N alors $a^{-1}L$ aussi, pour tout $a \in \Sigma$.
2. Démontrer le théorème, en supposant qu'il n'y a qu'un nombre fini de langages satisfaisant P_N pour un N fixé.
3. On rappelle le théorème de Ramsey, spécialisé pour nos besoins : pour tout N il existe R tel que, pour tout ensemble E de cardinal au moins R et pour toute partition $\mathcal{P}$ de $\mathfrak{P}_2(E) = \{ \{e, e'\} \ : \ e, e' \in E, \ e \neq e' \}$ en deux classes, il existe un sous-ensemble $F \subseteq E$ de cardinal N tel que $\mathfrak{P}_2(F)$ est tout entier contenu dans une seule classe de $\mathcal{P}$.
   Soient L et L' deux langages satisfaisant P_N et coïncidant sur les mots de longueur inférieure $R-1$. Montrer qu'ils coïncident aussi sur les mots de longueur $M \geq R-1$, par induction sur M. On pourra considérer, pour un $f = a_1 \dots a_{R-1} t$ de longueur M (avec $a_i \in \Sigma$) la partition suivante de $\mathfrak{P}_2([0; N-1])$:
   $$X_f = \{ \ (j,k) \ : \ 0 \leq j < k \leq R-1, \ a_1 \dots a_j a_{k+1} \dots a_{R-1} t \in L \ \}$$
   $$Y_f = \mathfrak{P}_2([0; R-1]) \setminus X_f$$
4. Conclure.