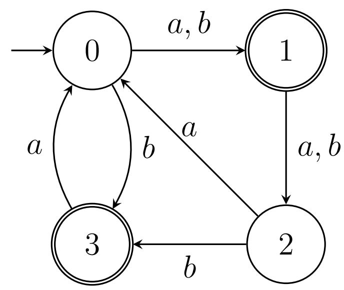
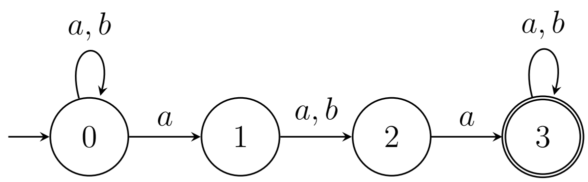
Langages Formels

Exercice 1 (Déterminisation)

1. Donner un automate fini déterministe équivalent à l'automate suivant :



2. Donner un automate fini déterministe équivalent à l'automate suivant :



Exercice 2 (Lemme de l'étoile)
Des conditions nécessaires pour qu'un langage soit reconnaissable sont connues sous le nom de « lemme de l'étoile » ou lemmes d'itération :

Lemme 1 (Lemme de l'étoile)**.** *Si L est un langage reconnaissable de Σ^*, alors il existe un entier n tel que*

1. *pour tout mot w de L avec $|w| \geq n$, il existe une factorisation $w = u_1u_2u_3$ avec u_2 non vide, telle que $u_1u_2^*u_3 \subseteq L$,*
2. *pour tout mot w de L et pour toute factorisation de $w = v_1v_2v_3$ avec $|v_2| \geq n$, il existe une factorisation $v_2 = u_1u_2u_3$ avec u_2 non vide, telle que $v_1u_1u_2^*u_3v_3 \subseteq L$,*

3. *pour tout mot w de L et pour toute factorisation $w = u_0 u_1 \cdots u_n u_{n+1}$ avec u_i non vide pour i de 1 à n, il existe deux positions $0 \leq j < k \leq n$ telles que $u_0 u_1 \cdots u_j (u_{j+1} \cdots u_k)^* u_{k+1} \cdots u_n u_{n+1} \subseteq L$.*

1. Démontrez le lemme de l'étoile.
2. Montrez que $\{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ n'est pas reconnaissable sur $\{a, b\}^*$.
3. Soit L un langage quelconque sur Σ et $\#$ un symbole qui n'est pas dans Σ.
   (a) Montrer que le langage $L_{\#} = (\#^+ L) \cup \Sigma^*$ satisfait les conditions de la première version du lemme de l'étoile.
   (b) Montrer à l'aide de propriétés de clôture que si L n'est pas reconnaissable, alors $L_{\#}$ n'est pas reconnaissable.
   (c) Montrer que si L ne satisfait pas les conditions de la première version du lemme de l'étoile, alors $L_{\#}$ ne satisfait pas les conditions de la seconde version du lemme.
4. Soit L un langage quelconque sur Σ et $\$$ un symbole qui n'est pas dans Σ. On définit

$$L_1 = \{\$^+ a_1 \$^+ a_2 \$^+ \ldots \$^+ a_n \$^+ \mid n \geq 0, \forall i\ a_i \in \Sigma, \text{ et } w = a_1 \ldots a_n \in L\}$$
$$L_2 = \{\$^+ v_1 \$^+ v_2 \$^+ \ldots \$^+ v_n \$^+ \mid n \geq 0, \forall i\ v_i \in \Sigma^* \text{ et } \exists j\ |v_j| > 1\}$$
$$L_\$ = L_1 \cup L_2\ .$$

   (a) Montrer que $L_\$$ satisfait les conditions de la seconde version du lemme de l'étoile.
   (b) Montrer à l'aide de propriétés de clôture que si L n'est pas reconnaissable, alors $L_\$$ non plus.
   (c) Montrer que si L ne satisfait pas les conditions de la troisième version du lemme de l'étoile, alors $L_\$$ ne les vérifie pas non plus.

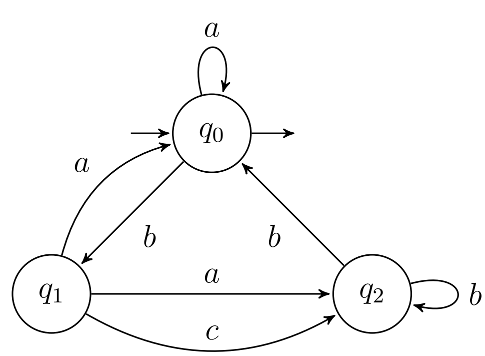
Exercice 3 (Construction d'automates, ou pas)
Pour chacun des langages suivants sur $\Sigma = \{0, 1\}$, dire s'il est régulier (reconnaissable par un automate fini) ou pas. Justifier en donnant un automate ou un argument.

1. $\{\ u\ :\ |u|_0 = |u|_1\ \}$ où $|u|_a$ est le nombre d'occurrences de a dans u ;
2. $\{\ 0^p 1^q\ :\ p \geq q\ \}$;

3. $\{ \, 0^p 1^q \ : \ p \geq q, \ q \leq 1337 \, \}$;
4. $\{ \, u \ : \ \overline{u}^2 = 0 \mod 3\}$ où $\overline{u}^2$ est l'interprétation de u en binaire, avec le bit de poids fort à droite.

Exercice 4 (Algorithme de Brzozowski-McCluskey)
L'objectif de cet exercice est de traduire un automate fini en une expression rationnelle. Nous allons procéder par transformations successives de l'automate, en utilisant une généralisation du type d'automate considéré : la relation de transition sera un sous-ensemble de $Q \times 2^{\Sigma^*} \times Q$. Une exécution d'un tel automate reconnait la concaténation des langages des transitions, et le langage reconnu par l'automate est l'union de ces exécutions.

1. Montrer que tout automate généralisé est équivalent à un automate généralisé pour lequel il existe exactement une transition entre chaque paire d'états : $q' \in \delta(q, L)$ et $q' \in \delta(q, L')$ implique $L = L'$.
2. Soit un automate généralisé $\mathcal{A}$ avec un unique état initial i, un unique état final f. Soit $q \in Q_{\mathcal{A}}$, $q \notin \{i, f\}$. Montrer qu'il existe un automate équivalent à $\mathcal{A}$ avec pour ensemble d'états $Q_{\mathcal{A}} \setminus \{q\}$.
3. En déduire que si L est reconnu par un automate généralisé $\mathcal{A}$, alors L appartient à la clôture rationnelle des étiquettes des transitions de $\mathcal{A}$.
4. Appliquer la construction pour calculer une expression rationnelle correspondant à l'automate suivant :



5. On considère l'alphabet $\Sigma_n = \{1, \ldots, n\} \times \{1, \ldots, n\}$, et on définit :

$$L = \{ \ (a_1, a_2)(a_2, a_3) \ldots (a_m, a_{m+1}) \ : \ m \geq 1, \ a_1 = 1, \ a_{m+1} = n \ \}$$

   (a) Donner un automate de taille quadratique reconnaissant L.

(b) Quelle est la taille de l'expression obtenue par la construction précédente sur cet automate ?