TD7 8 mars 2017

Langages Formels

Exercice 1 — Motifs Objective Caml
Voici un extrait de la syntaxe des motifs d'Objective Caml, sur l'alphabet terminal $\Sigma = \{\texttt{VN}, _, ::, \texttt{as}, [,], ;\}$ et l'ensemble de variables $N = \{\langle pat \rangle, \langle patl \rangle\}$:

$$\begin{aligned}
\langle pat \rangle &\to \texttt{VN} \mid _ \mid \langle pat \rangle :: \langle pat \rangle \mid \langle pat \rangle \texttt{ as VN} \mid [\ \langle patl \rangle\ ] \\
\langle patl \rangle &\to \langle pat \rangle \mid \langle patl \rangle\ ;\ \langle pat \rangle
\end{aligned}$$

Cette grammaire permet de générer des motifs tels que `[a;_;b] :: t as l`

1. Donner une grammaire fortement LL(1) équivalente à ce fragment.
2. Préciser les ensembles Prem_1 et Suiv_1 calculés.
3. Écrire un analyseur récursif descendant dans votre langage favori pour votre grammaire.

Exercice 2 — Récursivité gauche, ambiguïté

1. Montrer qu'une grammaire algébrique est LL(k) si et seulement si, pour toutes dérivations gauches $S \Rightarrow_{lm}^* uA\delta \Rightarrow_{lm} u\alpha_1\delta \Rightarrow_{lm}^* uv_1$ et $S \Rightarrow_{lm}^* uA\delta \Rightarrow_{lm} u\alpha_2\delta \Rightarrow_{lm}^* uv_2$ avec $\text{Prem}_k(v_1) = \text{Prem}_k(v_2)$, nécessairement $\alpha_1 = \alpha_2$.
2. Montrer que si une grammaire est ambiguë, alors elle n'est LL(k) pour aucun k.
3. Une variable $A \in N$ est *récursive gauche* s'il existe une dérivation $A \Rightarrow^+ A\alpha$ avec α dans $(N \uplus \Sigma)^*$. Une grammaire réduite est récursive gauche s'il existe au moins une variable A recursive gauche.

   Montrer que si une grammaire réduite est récursive gauche, alors elle n'est LL(k) pour aucun k.

Exercice 3 — Langages fortement LL(k)

1. Montrer qu'une grammaire algébrique est fortement LL(k) si et seulement si, pour toutes dérivations gauches $S \Rightarrow_{lm}^* u_1 A \delta_1 \Rightarrow_{lm} u_1 \alpha_1 \delta_1 \Rightarrow_{lm}^* u_1 v_1$ et $S \Rightarrow_{lm}^* u_2 A \delta_2 \Rightarrow_{lm} u_2 \alpha_2 \delta_2 \Rightarrow_{lm}^* u_2 v_2$ avec $\mathrm{Prem}_k(v_1) = \mathrm{Prem}_k(v_2)$, nécessairement $\alpha_1 = \alpha_2$.
2. Montrer qu'une grammaire est LL(1) si et seulement si elle est fortement LL(1).
3. Montrer que la grammaire suivante est LL(2) mais n'est fortement LL(k) pour aucun k :

$$\begin{aligned} S &\to aAab \mid bAb \\ A &\to cAB \mid \varepsilon \mid a \\ B &\to \varepsilon \end{aligned}$$

4. Montrer que si une grammaire est LL(k), alors il existe une grammaire fortement LL(k) équivalente, qui utilise des variables de la forme (A, F) où $F \subseteq \mathrm{Suiv}_k(A)$.
5. Appliquer cette construction à la grammaire précédente.

Exercice 4 — Calcul efficace de Prem_1 et Suiv_1

On appelle *expression relationnelle* un terme décrit par la syntaxe abstraite

$$e ::= r \mid e^* \mid e^{-1} \mid e \cdot e \mid e \cup e$$

où r est une relation "atomique". Une expression relationnelle définit une relation $R(e)$. La *taille* $|e|$ d'une expression relationnelle e est la somme des tailles des relations atomiques qui la composent. Pour une expression relationnelle e de taille finie, on peut calculer une image par sa relation $R(e)$ en temps $O(|e|)$. On souhaite calculer les ensembles Prem_1 et Suiv_1 d'une grammaire réduite G à l'aide d'expressions relationnelles de taille $O(|G|)$, de manière à obtenir des algorithmes en temps linéaire $O(|G|)$.

1. Proposer une expression relationnelle $\mathsf{emptyword}$ sur $N \times \{\varepsilon\}$ de taille $O(|G|)$ telle que

$$R(\mathsf{emptyword})(A) = \{\varepsilon \mid A \Rightarrow^* \varepsilon\} \ .$$

2. Proposer une expression relationnelle prem sur $N \times (\Sigma \uplus \{\varepsilon\})$ de taille $O(|G|)$ telle que

$$R(\mathsf{prem})(A) = \mathrm{Prem}_1(A) \ .$$

3. Proposer une expression relationnelle end sur $N \times \{\varepsilon\}$ de taille $O(|G|)$ telle que

$$R(\mathsf{end})(A) = \{\varepsilon \mid \exists \delta \in (N \uplus \Sigma)^*,\ S \Rightarrow^* \delta A\}\ .$$

4. Proposer une expression relationnelle suiv sur $N \times (\Sigma \uplus \{\varepsilon\})$ telle que

$$R(\mathsf{suiv})(A) = \mathrm{Suiv}_1(A)\ .$$

Au moins dans un premier temps, on pourra se contenter d'une expression de taille $O(|G|^2)$.